

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 14 (1968)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** EIN HOLOMORPH-SEPARABLER KOMPLEXER RAUM MUSS NICHT HOLOMORPH-REGULÄR SEIN  
**Autor:** Wiegmann, Klaus-Werner  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-42355>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 30.01.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# EIN HOLOMORPH-SEPARABLER KOMPLEXER RAUM MUSS NICHT HOLOMORPH-REGULÄR SEIN

von Klaus-Werner WIEGMANN

In der Arbeit [2, Satz 2\*] wird bewiesen, dass ein komplexer Raum genau dann lokal-holomorph-separabel ist, wenn eine holomorph-reguläre komplexe Unterstruktur mit gleicher globaler Funktionenalgebra existiert. Es entsteht die Frage, ob nicht schärfer gilt, dass jeder holomorph-separable komplexe Raum selbst holomorph-regulär ist. Doch dazu geben wir das folgende *Gegenbeispiel* an:

Wir betrachten das Gebiet

$$X := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| \neq 1 \text{ oder } z_2 \neq 0\}$$

mit der üblichen komplexen Struktur  $\theta := {}_2\theta|_X$ . Die Holomorphiehülle von  $(X, \theta)$  ist  $(\mathbb{C}^2, {}_2\theta)$ , und es gilt:

$$\theta(X) = {}_2\theta(\mathbb{C}^2) = \overline{\mathbb{C}[z_1, z_2]};$$

die abgeschlossene Hülle in  ${}_2\theta(\mathbb{C}^2)$  wird dabei bzgl. der Topologie der kompakten Konvergenz gebildet. Es sei

$$M := \{(z_1, z_2) \in X : z_2 = 0 \text{ und } |z_1| < 1\}$$

die (offene) Einheitskreisscheibe in der  $z_1$ -Ebene des  $\mathbb{C}^2$ .  $M$  ist eine analytische Menge in  $(X, \theta)$ . Eine Garbe  $\mathcal{A}$  auf  $X$  definieren wir folgendermassen:

$$\mathcal{A}(U) := \{f \in \theta(U) : f_{(a,0)} \in \mathbb{C}[\langle z_1 - a, z_2^2, z_2^3 \rangle] \text{ (} (a, 0) \in M \cap U \text{)},$$

falls  $U \subset X$  offen ist. Es gilt:

$$\mathcal{A}_x = \begin{cases} \mathbb{C}[\langle z_1 - a, z_2^2, z_2^3 \rangle] & \text{für } x = (a, 0) \in M \\ \theta_x & \text{sonst} \end{cases}.$$

Wir zeigen, dass  $(X, \mathcal{A})$  ein komplexer Raum ist.

Dazu müssen wir zwei Fälle unterscheiden:  $x = (a, 0) \in M$  und  $x = (x_1, x_2) \in X - M$ .

$$U := \{(z_1, z_2) \in X : |z_1| < 1\}$$

ist eine offene Umgebung von  $(a, 0)$ , und  $(U, \mathcal{A}|_U)$  ist direktes Produkt

des  $(C^1, {}_1\mathcal{O})$  mit der Neilschen Parabel (auf die offene Einheitskreisscheibe beschränkt).

$$V := \{(z_1, z_2) \in X : z_2 \neq 0 \text{ oder } |z_1| > 1\} = X/M$$

ist eine offene Umgebung von  $(x_1, x_2)$  mit  $(V, \mathcal{A}|_V) = (V, \mathcal{O}|_V)$ , q.e.d.

Die globalen holomorphen Funktionen  $\mathcal{A}(X) = \overline{C[z_1, z_2^2, z_2^3]}$  trennen die Punkte von  $X$ , erzeugen aber keinen Cotangentialraum

$$T_x(X, \mathcal{A}) = \mathfrak{m}(\mathcal{A}_x) / \mathfrak{m}(\mathcal{A}_x)^2, \quad x = (b, 0) \in X/M;$$

denn für solche  $x$  gilt  $\mathcal{A}_x = \mathcal{O}_x$  und deshalb  $T_x(X, \mathcal{A}) = T_x(X, \mathcal{O})$ .

Damit ist gezeigt, dass  $(X, \mathcal{A})$  holomorph-separabel, aber nicht holomorph-regulär ist.

#### BEMERKUNGEN

1. Es gibt kein eindimensionales Beispiel dieser Art, weil jeder eindimensionale komplexe Raum ohne kompakte irreduzible Komponenten Steinsch, insbesondere holomorph-regulär ist.

2. Unser Beispiel zeigt ausserdem: Ein komplexer Raum  $X$ , der eine Steinsche Holomorphiehülle  $\tilde{X}$  besitzt, so dass die zugehörige Abbildung  $X \rightarrow \tilde{X}$  injektiv ist, braucht nicht Teilraum dieser Hülle zu sein.

3. Übrigens ist für einen prä-Steinschen Raum die zugehörige holomorphe Abbildung in die Holomorphiehülle genau dann injektiv, wenn er holomorph-separabel ist. In beiden Fällen ist diese Abbildung sogar offen. Das folgt etwa aus [1, § 1] und [2, Satz 2].

#### LITERATUR

- [1] FORSTER, O., Zur Theorie der Steinschen Algebren und Moduln, *Math. Z.* 97, 376-405 (1967).
- [2] WIEGMANN, K.-W., Strukturen auf Quotienten komplexer Räume. Comm., *Math. Helv.* 44, 93-116 (1969).

(15. März 1969)