Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 14 (1968)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: EIN HOLOMORPH-SEPARABLER KOMPLEXER RAUM MUSS NICHT HOLOMORPH-REGULÄR SEIN

Autor: Wiegmann, Klaus-Werner

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-42355

EIN HOLOMORPH-SEPARABLER KOMPLEXER RAUM MUSS NICHT HOLOMORPH-REGULÄR SEIN

von Klaus-Werner WIEGMANN

In der Arbeit [2, Satz 2*] wird bewiesen, dass ein komplexer Raum genau dann lokal-holomorph-separabel ist, wenn eine holomorph-reguläre komplexe Unterstruktur mit gleicher globaler Funktionenalgebra existiert. Es entsteht die Frage, ob nicht schärfer gilt, dass jeder holomorph-separable komplexe Raum selbst holomorph-regulär ist. Doch dazu geben wir das folgende *Gegenbeispiel* an:

Wir betrachten das Gebiet

$$X := \{(z_1, z_2) \in \boldsymbol{C}^2 : |z_1| \neq 1 \ \ oder \ \ z_2 \neq 0\}$$

mit der üblichen komplexen Struktur $\mathcal{O} := {}_2\mathcal{O} \mid X$. Die Holomorphiehülle von $(X, \mathcal{O})$ ist $(\boldsymbol{C}^2, {}_2\mathcal{O})$, und es gilt:

$$\mathcal{O}(X) = {}_2\mathcal{O}(C^2) = \overline{\boldsymbol{C}[z_1, z_2]};$$

die abgeschlossene Hülle in ${}_2\mathcal{O}(\boldsymbol{C}^2)$ wird dabei bzgl. der Topologie der kompakten Konvergenz gebildet. Es sei

$$M := \{(z_1, z_2) \in X : z_2 = 0 \quad und \quad |z_1| < 1\}$$

die (offene) Einheitskreisscheibe in der z_1-Ebene des $\boldsymbol{C}^2$. M ist eine analytische Menge in $(X, \mathcal{O})$. Eine Garbe $\mathscr{A}$ auf X definieren wir folgendermassen:

$$\mathscr{A}(U) := \{f \in \mathcal{O}(U) : f_{(a,o)} \in \boldsymbol{C}[<z_1 - a, z_2^2, z_2^3>] \quad (a, 0) \in M \cap U\},$$

falls $U \subset X$ offen ist. Es gilt:

$$\mathscr{A}_x = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{C}[<z_1 - a, z_2^2, z_2^3>] & \text{für} \quad x = (a, 0) \in M \\ \mathcal{O}_x & \text{sonst} \end{Bmatrix}.$$

Wir zeigen, dass $(X, \mathscr{A})$ ein komplexer Raum ist.

Dazu müssen wir zwei Fälle unterscheiden: $x = (a, 0) \in M$ und $x = (x_1, x_2) \in X - M$.

$$U := \{(z_1, z_2) \in X : |z_1| < 1\}$$

ist eine offene Umgebung von $(a, 0)$, und $(U, \mathscr{A}|U)$ ist direktes Produkt des $(\boldsymbol{C}^1, {}_1\mathcal{O})$ mit der Neilschen Parabel (auf die offene Einheitskreisscheibe beschränkt).

$$V: = \{(z_1, z_2) \in X : z_2 \neq 0 \quad oder \quad |z_1| > 1\} = X / M$$

ist eine offene Umgebung von (x_1, x_2) mit $(V, \mathscr{A}|V) = (V, \mathcal{O}|V)$, q.e.d.

Die globalen holomorphen Funktionen $\mathscr{A}(X) = \overline{\boldsymbol{C}[z_1, z_2^2, z_2^3]}$ trennen die Punkte von X, erzeugen aber keinen Cotangentialraum

$$T_x(X, \mathscr{A}) = \mathfrak{m}(\mathscr{A}_x) / \mathfrak{m}(\mathscr{A}_x)^2, \; x = (b, 0) \in X / M ;$$

denn für solche x gilt $\mathscr{A}_x = \mathcal{O}_x$ und deshalb $T_x(X, \mathscr{A}) = T_x(X, \mathcal{O})$.

Damit ist gezeigt, dass $(X, \mathscr{A})$ holomorph-separabel, aber nicht holomorph-regulär ist.

Bemerkungen

1. Es gibt kein eindimensionales Beispiel dieser Art, weil jeder eindimensionale komplexe Raum ohne kompakte irreduzible Komponenten Steinsch, insbesondere holomorph-regulär ist.

2. Unser Beispiel zeigt ausserdem: Ein komplexer Raum X, der eine Steinsche Holomorphiehülle $\tilde{X}$ besitzt, so dass die zugehörige Abbildung $X \to \tilde{X}$ injektiv ist, braucht nicht Teilraum dieser Hülle zu sein.

3. Übrigens ist für einen prä-Steinschen Raum die zugehörige holomorphe Abbildung in die Holomorphiehülle genau dann injektiv, wenn er holomorph-separabel ist. In beiden Fällen ist diese Abbildung sogar offen. Das folgt etwa aus [1, § 1] und [2, Satz 2].

LITERATUR

[1] Forster, O., Zur Theorie der Steinschen Algebren und Moduln, *Math. Z. 97*, 376-405 (1967).

[2] Wiegmann, K.-W., Strukturen auf Quotienten komplexer Räume. Comm., *Math. Helv.* 44, 93-116 (1969).

(15. März 1969)

Mathematisches Institut
der Universität München
Schellingstr. 2- 8.