

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 14 (1968)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: CLASSES DE CHERN D'UN ESPACE HOMOGENÈNE PRESQUE COMPLEXE
Autor: Maumary, S.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-42358>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 30.01.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

CLASSES DE CHERN D'UN ESPACE HOMOGENÈNE PRESQUE COMPLEXE

par S. MAUMARY *

1. DONNÉE DU PROBLÈME

Soit G un groupe de Lie compact réel, U un sous-groupe fermé, et G/U l'espace des classes à droite gU , $g \in G$. Ce dernier est une variété différentiable réelle compacte, dont on désignera l'espace tangent au point $0 = U \in G/U$ par $(G/U)_0$. Considérons la représentation isotrope $\iota(u) = du(0) \in \text{Aut}_{\mathbf{R}}(G/U)_0$, $u \in U$ étant interprété comme translation à gauche de G/U . Cette représentation détermine le fibré tangent ξ à G/U : l'application $G \times (G/U)_0 \rightarrow E(\xi)$, donnée par $(g, v) \mapsto dg(v)$, en interprétant $g \in G$ comme translation à gauche de G/U , devient un homéomorphisme si l'on identifie (gu, v) avec $(g, \iota(u)v)$.

Supposons que ξ soit muni d'une structure complexe J , invariante par G . Autrement dit, J est un \mathbf{R} -automorphisme de ξ , tel que $J^2 = -\text{identité}$ et $J \circ dg = dg \circ J$, en interprétant $g \in G$ comme translation à gauche de G/U . Cette dernière égalité montre que J est déterminée par sa restriction à la fibre $(G/U)_0$ et que celle-ci est invariante par $\iota(u)$, $u \in U$. On écrira ξ^J le fibré ξ muni de la structure complexe J . La représentation réelle ι se factorise alors canoniquement par une représentation complexe $\iota^J : U \rightarrow \text{Aut}_{\mathbf{C}}(G/U)_0^J$, qui détermine ξ^J comme précédemment.

Prenons un tore $T \subset U$, et soit $q : G/T \rightarrow G/U$ l'application canonique $gT \mapsto gU$. La restriction $\iota|_T$ détermine $q^*\xi$: l'application $G \times (G/U)_0 \rightarrow E(q^*\xi)$, donnée par $(g, v) \mapsto (gT, dg(v))$, devient un homéomorphisme si l'on identifie (gt, v) avec $(g, \iota(t)v)$, $\forall t \in T$. Maintenant, $\iota^J|_T$ est somme directe de représentations complexes ϕ_{α}^J de rang 1, donc $q^*\xi^J$ est somme directe de fibrés vectoriels complexes ξ_{α}^J de rang 1, déterminé par ϕ_{α}^J . La classe totale de Chern $c(\xi^J) \in H^*(G/U; \mathbf{Z})$ vérifie donc

$$q^*(c(\xi^J)) = c(q^*\xi^J) = \prod_{\alpha} c(\xi_{\alpha}^J) = \prod_{\alpha} (1 + \chi(\xi_{\alpha}^J)) \in H^*(G/T; \mathbf{R}).$$

*) Conférence donnée à la réunion des mathématiciens suisses aux Plans-sur-Bex mars 1968.

Comment la classe d'Euler $\chi(\xi_\alpha^J)$ est-elle déterminée par ϕ_α^J ? Si T est un tore maximal dans G , on pourra donner une réponse complète.

En ce qui concerne les classes caractéristiques, on suppose seulement que l'on connaît, pour tout fibré vectoriel réel orienté, sa classe d'Euler, sa suite exacte de Gysin et l'existence d'une application classifiante.

Exemple :

Si $G = U_{n+1}$ (groupe unitaire à $n+1$ variables), et

$$U = \left(\begin{array}{c|c} U_1 & 0 \\ \hline 0 & U_n \end{array} \right),$$

l'application $G/U \rightarrow PC^n$ induite par $g \mapsto g(1, 0, \dots, 0)$, $g \in G$, est un difféomorphisme. Mais la variété PC^n admet une structure complexe invariante par G , donnée au voisinage de $(1:0:\dots:0)$ par la carte $(1:z_2:\dots:z_{n+1}) \mapsto (z_2, \dots, z_{n+1})$. Soit J la structure complexe invariante induite sur le fibré tangent réel ξ à PC^n . Alors ξ^J est le fibré tangent complexe.

Soit

$$T = \left(\begin{array}{ccc} U_1 & & 0 \\ & U_1 \cdots & \\ 0 & & U_1 \end{array} \right) = U_1 \times \dots \times U_1$$

le tore dans U , qui est d'ailleurs maximal dans G . Par définition, $\iota^J(\exp ix_1, \dots, \exp ix_{n+1})$, $x_\alpha \in \mathbf{R}$, est la différentielle complexe de la translation

$$(1:z_2:\dots:z_{n+1}) \mapsto (\exp ix_1:z_2 \exp ix_2:\dots:z_{n+1} \exp ix_{n+1}) = \\ (1:z_2 \exp i(x_2-x_1):\dots:z_{n+1} \exp i(x_{n+1}-x_1))$$

au point $(1:0:\dots:0)$. Dans la carte ci-dessus, on a donc

$$\iota^J(\exp ix_1, \dots, \exp ix_{n+1})(z_\alpha) = z_\alpha \exp i(x_\alpha - x_1), \quad \alpha > 1.$$

Donc

$$\phi_\alpha^J(\exp ix_1, \dots, \exp ix_{n+1})(z_\alpha) = z_\alpha \exp i(x_\alpha - x_1).$$

2. EXTENSION DES FIBRÉS PRINCIPAUX

Etant donné un groupe de Lie compact réel G , un G -fibré principal P est défini par un espace $E(P)$ muni d'une action libre et continue de G , à droite, et par une projection $\pi : E(P) \rightarrow B(P)$ sur un espace de base compact $B(P)$, telle que $\pi(x) = \pi(y) \Leftrightarrow x \in yG$. Un morphisme de G -fibrés prin-

cipaux $P' \rightarrow P$ est une application $f : E(P') \rightarrow E(P)$ équivariante par G ; elle induit une application $B(P') \rightarrow B(P)$. Pour toute application $q : B' \rightarrow B(P)$, on appelle image réciproque q^*P de P le G -fibré principal d'espace $E(q^*P) = \{ (x, y) \in B' \times E(P) \mid q(x) = \pi(y) \}$ muni de l'action $(x, y)g = (x, yg)$ de $g \in G$, et de la projection $(x, y) \rightarrow x$ sur $B(q^*P) = B'$. Lorsque q est induit par un morphisme de G -fibrés principaux $P' \rightarrow P$, alors $q^*P \approx P'$.

Exemples :

1) Soit U un sous-groupe fermé d'un groupe de Lie compact G . En posant $E = G$ muni des translations à droite par U , $B = G/U$, et $\pi(g) = gU$, $g \in G$, on obtient un U -fibré principal que l'on notera G_U . Plus généralement, si P est un G -fibré principal, on obtient un U -fibré principal P_U en posant $E(P_U) = E(P)$, $B(P_U) = E(P)/U$, et $\pi(x) = xU$, $x \in E(P)$.

2) Soit $E = S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$, muni de l'action $(z_1, \dots, z_{n+1}) \lambda = (z_1 \lambda, \dots, z_{n+1} \lambda)$ du groupe unitaire U_1 , $B = PC^n$, et $\pi : S^{2n+1} \rightarrow PC^n$ l'application canonique. On obtient ainsi un U_1 -fibré principal γ , appelé fibré de Hopf.

Etant donné un G -fibré principal P et un G -espace F , c'est-à-dire un espace muni d'une action continue à gauche de G , on appelle fibré de fibre F associé à P l'espace $E(P) \times_G F$ quotient de $E(P) \times F$ par la relation $(x, y) = (xg, gy)$, $g \in G$, muni de la projection $E(P) \times_G F \rightarrow B(P)$ induite par $(x, y) \mapsto \pi(x)$. On notera $P[F]$ ce fibré et $x \times_G y$ la classe de (x, y) dans $E(P) \times_G F$.

Exemple :

Soit ξ un fibré vectoriel complexe de rang n sur un espace compact B . Introduisons sur ξ un produit scalaire paramétré continûment par les fibres, et soit E l'ensemble des bases orthonormées $(e_i(b))$ des fibres de ξ , muni de l'action du groupe unitaire U_n donnée par $(e_i(b))A = \sum_i a_{ji} e_i(b)$, $A = (a_{ij}) \in U_n$, (A devient ainsi la matrice de passage d'une base à l'autre).

Soit $\pi : E \rightarrow B$ la projection $(e_i(b)) \rightarrow b$. Afin d'obtenir une topologie convenable sur E , considérons un ouvert trivialisant $U \subset B$, c'est-à-dire que $\xi|_U \approx U \times \mathbb{C}^n$. Pour $b \in U$, l'application $(e_i(b)) \mapsto (b, A)$, $A =$ matrice de passage de la base canonique de \mathbb{C}^n à $(e_i(b))$, est une bijection $\phi_U : \pi^{-1}(U) \approx U \times U_n$ équivariante par U_n , ce dernier agissant par

translations à droite sur $U \times U_n$. Donc, si V est un autre ouvert trivialisant pour ξ , alors $\phi_V \phi_U^{-1}(b, A) = (b, A(b)A)$ où $A(b) \in U_n$ dépend continûment de $b \in U \cap V$. Il en résulte une topologie sur E pour laquelle les ϕ_U sont des homéomorphismes, et l'action de G est continue. Cet espace muni de π détermine donc un U_n -fibré principal P . Pour le U_n -espace canonique \mathbf{C}^n , $E \times_{U_n} \mathbf{C}^n$ est homéomorphe à $E(\xi)$ par $(e_i(b)) \times (y_i) \mapsto \sum_i y_i e_i(b)$, d'où un isomorphisme $\xi \approx P[\mathbf{C}^n]$.

En particulier, le fibré vectoriel canonique η sur $P\mathbf{C}^n$, dont l'espace est par définition $\{(x, y) \in P\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^{n+1} \mid y \in x\}$, est associé de la manière précédente au fibré de Hopf γ .

Considérons maintenant un G -fibré principal P et un homomorphisme $\phi : G \rightarrow G'$. Ce dernier détermine canoniquement une action à gauche de G sur G' , d'où le fibré associé $P[G']$. Mais on peut munir $E(P) \times_G G'$ des translations à droite par G' . Alors $P[G']$ devient un G' -fibré principal ${}_\phi P$, appelé ϕ -extension de P . Un G' -espace F devient par ϕ un G -espace et alors ${}_\phi P[F]$ est canoniquement isomorphe à $P[F]$.

Un isomorphisme de G' -fibrés principaux $h : {}_\phi P \approx P'$ correspond biunivoquement à une application $f : E(P) \rightarrow E(P')$, telle que $f(xg) = f(x)\phi(g)$, la correspondance étant donnée par $f(x) = h(x \times 1)$.

Exemple :

Soit P un G -fibré principal, U un sous-groupe fermé, et i l'inclusion de U dans G . Si $q : E(P)/U \rightarrow B(P)$ est l'application $xU \mapsto \pi(x)$, alors q^*P est canoniquement isomorphe à la i -extension du U -fibré principal P_U . En effet, cet isomorphisme correspond à l'application $E(P_U) \rightarrow E(q^*P)$ donnée par $x \mapsto (xU, x)$.

Lemme : Soit G un groupe de Lie réel compact, U un sous-groupe fermé de G , et ι la représentation isotrope de U dans $\mathbf{R}^n = (G/U)_0$. Alors le fibré tangent ξ à G/U est $G_U[\mathbf{R}^n]$, \mathbf{R}^n étant le U -espace déterminé par ι .

Preuve : Choisissons dans ξ un produit scalaire invariant par les translations à gauche de G/U par G . Cela revient à choisir un produit scalaire dans $\mathbf{R}^n = (G/U)_0$ invariant par ι . On a vu que ξ est associé au 0_n -fibré principal P' , ($0_n =$ groupe orthogonal à n variables), dont l'espace $E(P')$ est celui des bases orthonormées des fibres de ξ . Choisissons une base orthonormée fixée (e_i) dans $\mathbf{R}^n = (G/U)_0$, et considérons l'application $f : E(G_U) \rightarrow E(P')$ donnée par $g \mapsto dg(e_i)$, en interprétant g comme translation à

gauche de G/U . On a évidemment $f(gu) = f(g) \iota(u)$ pour $u \in U$, donc f détermine un isomorphisme $\iota(G_U) \approx P'$. Il en résulte l'isomorphisme annoncé $G_U[\mathbf{R}^n] \approx \xi$.

Corollaire : Dans les conditions du lemme, soient T un sous-groupe de U , et $q : G/T \rightarrow G/U$ l'application canonique $gT \mapsto gU$. Alors $q^*\xi$ est le fibré $G_T[\mathbf{R}^n]$, \mathbf{R}^n étant le T -espace déterminé par $\iota|_T$.

Preuve : On a déjà vu que q^*G_U est la i -extension de G_T . Or $q^*\xi$ est associé au 0_n -fibré principal q^*P' , donc $q^*P' \approx q^*(\iota(G_U)) = \iota(q^*G_U) = \iota(G_T)$. Il en résulte que $q^*\xi \approx G_T[\mathbf{R}^n]$, pour l'action $\iota|_T$ de T sur \mathbf{R}^n .

3. INTERPRÉTATIONS DES REPRÉSENTATIONS COMPLEXES IRRÉDUCTIBLES D'UN TORE T

Tout homomorphisme différentiable $h : U_1 \rightarrow U_1$ est de la forme $h(\exp ix) = \exp iax$, $a \in \mathbf{Z}$. Cela résulte du fait que la différentielle d'une translation à gauche τ_g de U_1 est en tout point l'identité $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, ce qui implique $dh(g) = dh(1)$, $g \in U_1$, en vertu de $dh(g) \circ d\tau_g(1) = d(h \circ \tau_g)(1) = d(\tau_{(hg)} \circ h)(1)$. Alors h est nécessairement de la forme ci-dessus, avec $a \in \mathbf{R}$. Mais si $x \in \mathbf{Z}$, on doit avoir $ax \in \mathbf{Z}$, c'est-à-dire $a \in \mathbf{Z}$. Plus généralement, si $T = U_1 \times \dots \times U_1$ et si $k_j : U_1 \rightarrow T$ applique $\exp ix$ sur $(1, \dots, 1, \exp ix, 1, \dots, 1)$, tout homomorphisme $h : T \rightarrow U_1$ est de la forme $h(\exp ix_1, \dots, \exp ix_n) = \prod_j h \circ k_j(\exp ix_j) = \prod_j \exp i a_j x_j = \exp i(a_1 x_1 + \dots + a_n x_n)$, $a_j \in \mathbf{Z}$. D'où une bijection canonique $\alpha : \text{Hom}(T, U_1) \approx \mathbf{Z}^n$, $\alpha(h) = (a_j)$. Par ailleurs, $\text{Hom}(T, U_1)$ est un groupe abélien pour la multiplication des homomorphismes, et l'on voit aussitôt que α est un isomorphisme de groupes. En composant α avec l'inclusion $\mathbf{Z}^n \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ donnée par $(a_j) \rightarrow a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$, on obtient l'homomorphisme injectif $h \mapsto dh(1, \dots, 1)$ de $\text{Hom}(T, U_1)$ dans le dual de l'algèbre de Lie $\mathfrak{t} = \mathbf{R}^n$ de T . En particulier, si p_j est la projection de T sur son $j^{\text{ième}}$ facteur, $\alpha(p_j)$ est la fonction coordonnée x_j sur \mathbf{R}^n .

Considérons maintenant les groupes de cohomologie $H^1(T; \mathbf{Z})$ et $H^1(U_1; \mathbf{Z})$, où l'on suppose U_1 orienté de la manière habituelle. Alors $H^1(U_1; \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$, donc tout $h \in \text{Hom}(T, U_1)$ détermine un élément $h^*(1) \in H^1(T; \mathbf{Z})$, h^* étant l'homomorphisme $H^1(U_1; \mathbf{Z}) \rightarrow H^1(T; \mathbf{Z})$ induit par h . On obtient ainsi un homomorphisme naturel $v_T : \text{Hom}(T, U_1) \rightarrow H^1(T; \mathbf{Z})$.

En effet, si h et h' sont deux homomorphismes de T dans U_1 , considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{m} & \\
 & \xrightarrow{p_1} & \\
 U_1 \times U_1 & \xrightarrow[p_2]{k_1} & U_1 \quad p_i = i\text{eme composante} \\
 & \xleftarrow{k_2} & \\
 & \xleftarrow{\quad} &
 \end{array}$$

où $k_1(e^{i\theta}) = (e^{i\theta}, 1)$, $k_2(e^{i\theta}) = (1, e^{i\theta})$, et $m(e^{i\theta}, e^{i\theta'}) = e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$. Comme $mk_1 = mk_2 = \text{identité}$, on a $k_1^*m^*(1) = k_2^*m^*(1) = 1$ dans $H^1(U_1; \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$. Donc $(k_1p_1)^*m^*(1) = p_1^*(1)$, $(k_2p_2)^*m^*(1) = p_2^*(1)$ dans $H^1(U_1 \times U_1; \mathbf{Z})$. Mais la formule de Künneth $H^1(U_1 \times U_1; \mathbf{Z}) \approx H^1(U_1; \mathbf{Z}) \oplus H^1(U_1; \mathbf{Z})$ dit précisément que tout élément $\alpha \in H^1(U_1 \times U_1; \mathbf{Z})$ s'écrit de manière unique $\alpha = (k_1p_1)^*\alpha + (k_2p_2)^*\alpha$. En particulier $m^*(1) = p_1^*(1) + p_2^*(1)$, donc si hh' est l'homomorphisme produit $m \circ (h \times h')$, on a $(hh')^*(1) = h^*(1) + h'^*(1)$, c'est-à-dire $v_T(hh') = v_T(h) + v_T(h')$. La naturalité de v_T s'exprime ainsi: pour tout homomorphisme de tores $\phi : T' \rightarrow T$, on a $\phi^* \circ v = v \circ \phi^*$, où le premier ϕ^* est l'homomorphisme induit $H^1(T; \mathbf{Z}) \rightarrow H^1(T'; \mathbf{Z})$, tandis que le second est l'homomorphisme induit $\text{Hom}(T; U_1) \rightarrow \text{Hom}(T'; U_1)$. Cela résulte aussitôt de l'égalité $(h \circ \phi)^*(1) = \phi^*(h^*(1))$.

Lemme : v_T est un isomorphisme.

Preuve : Dans le cas $T = U_1$, v est un homomorphisme $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ tel que $v(1) = 1$. En général, on a des isomorphismes canoniques $\text{Hom}(T, U_1) \approx \oplus \text{Hom}(U_1, U_1)$ et $H^1(T; \mathbf{Z}) \approx \oplus H^1(U_1; \mathbf{Z})$ (formule de Künneth). Avec ces décompositions, la j^{ieme} composante de $h \in \text{Hom}(T, U_1)$ est $h \circ k_j$ et celle de $h^*(1)$ est $k_j^* \circ h^*(1) = (h \circ k_j)^*(1)$. Donc v se décompose en somme directe d'isomorphismes.

Considérons maintenant un T -fibré principal P de base $B(P) = X$. Pour tout $h \in \text{Hom}(T, U_1)$, on peut construire le fibré vectoriel de rang 1 $\xi_h = P[\mathbf{C}]$, où \mathbf{C} est le T -espace déterminé par h . Sa classe d'Euler $\chi(\xi_h)$ est un élément de $H^2(X; \mathbf{Z})$. De cette manière, on obtient un homomorphisme naturel $\mu_P : \text{Hom}(T, U_1) \rightarrow H^2(X; \mathbf{Z})$. En effet, si h et h' sont deux homomorphismes de T dans U_1 , et hh' l'homomorphisme produit, on a un isomorphisme canonique de fibrés vectoriels $\xi_h \otimes \xi_{h'} \approx \xi_{hh'}$, qui associe à tout vecteur $\begin{matrix} (x \times z) \\ U_1 \end{matrix} \otimes \begin{matrix} (x \times z') \\ U_1 \end{matrix}$ de $\xi_h \otimes \xi_{h'}$, le vecteur $x \times \begin{matrix} zz' \\ U_1 \end{matrix}$ de $\xi_{hh'}$. Mais d'une manière générale pour deux fibrés vectoriels complexes ξ et ξ' de rang 1 sur X , on a $\chi(\xi \otimes \xi') = \chi(\xi) + \chi(\xi')$. On le voit en utilisant des

applications classifiantes pour χ et χ , et en vérifiant que $\chi(\eta \hat{\otimes} \eta) = \chi(\eta) \oplus \chi(\eta)$, où $\hat{\otimes}$ désigne le produit tensoriel externe sur $PC^1 \times PC^1$: si x est un point fixé de PC^1 , on a $\eta \hat{\otimes} \eta | x \times PC^1 \cong \eta$ et de même $\eta \hat{\otimes} \eta | PC^1 \times y \cong \eta$. Donc, si k_1 et k_2 désignent les inclusions $PC^1 \rightarrow PC^1 \times PC^1$, $k_1(y) = (y, x)$, $k_2(y) = (x, y)$, on a $k_1^* \chi(\eta \hat{\otimes} \eta) = k_2^* \chi(\eta \hat{\otimes} \eta) = \chi(\eta)$. Mais on a l'isomorphisme de Künneth $H^2(PC^1 \times PC^1; \mathbf{Z}) \cong H^2(PC^1; \mathbf{Z}) \oplus H^2(PC^1; \mathbf{Z})$ donné par $\alpha \rightarrow k_1^*(\alpha) \oplus k_2^*(\alpha)$, puisque $H^1(PC^1; \mathbf{Z}) = 0$ en vertu de la suite exacte de Gysin de η . La naturalité de μ_P s'exprime comme suit: soient $\phi: T' \rightarrow T$ un homomorphisme de tores, P' un T' -fibré principal, P un T -fibré principal et $\phi P' \rightarrow P$ un morphisme de T -fibrés principaux. Si $f: X' \rightarrow X$ est l'application induite entre les bases, alors $f^* \circ \mu_P = \mu_{P'} \circ \phi^*$. En effet: $f^*(\xi_h) = f^* P[C]$ et $f^* P \approx \phi P'$, donc $f^*(\xi_h) = \phi P'[C]$, où C est le T -espace déterminé par h . Mais $\phi P'[C] = P'[C]$, où C au second membre est le T' -espace déterminé par $h \circ \phi$. Donc $\chi(f^* \xi_h) = \chi(\xi_{h \circ \phi})$, et il suffit de rappeler que $\chi(f^* \xi_h) = f^* \chi(\xi_h)$.

Lemme: Pour le T -fibré principal $\gamma \times \gamma \times \dots \times \gamma$ sur $B_T = PC^n \times \dots \times PC^n$, $\mu_{\gamma \times \dots \times \gamma}$ est un isomorphisme.

Preuve: Envisageons d'abord le cas $T = U_1$. Pour $h =$ identité: $U_1 \rightarrow U_1$, ξ_h est le fibré canonique η et $\chi(\eta)$ engendre $H^2(PC^n; \mathbf{Z})$ en vertu de la suite de Gysin de η . Donc μ_γ est surjectif. Comme $H^2(PC^n; \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$ en vertu de la même suite exacte, μ_γ est nécessairement injectif.

En général, on a des isomorphismes canoniques $\text{Hom}(T, U_1) \approx \oplus \text{Hom}(U_1, U_1)$ et $H^2(B_T; \mathbf{Z}) \approx \oplus H^2(PC^n; \mathbf{Z})$ (formule de Künneth). Avec ces décompositions, la $j^{\text{ième}}$ composante de $h \in \text{Hom}(T, U_1)$ est $h \circ k_j$, et celle de $\chi(\xi_h)$ est $k_j^* \chi(\xi_h)$, où k_j désigne cette fois l'application identité de PC^n sur $x \times \dots \times x \times PC^n \times x \dots \times x \subset B_T$, qui est d'ailleurs telle que $k_j^*(\gamma \times \dots \times \gamma) = k_j \gamma$. Comme $k_j^* \chi(\xi_h) = \chi(k_j^* \xi_h) = \chi(h \circ k_j \gamma[C])$, on a décomposé $\mu_{\gamma \times \dots \times \gamma}$ en somme directe d'isomorphismes.

Définition: On appelle *transgression* dans un T -fibré principal P de base X l'homomorphisme composé $\tau_P = \mu_P \nu_T^{-1}: H^1(T; \mathbf{Z}) \rightarrow H^2(X; \mathbf{Z})$. Elle est naturelle et c'est un isomorphisme lorsque P est universel, c'est-à-dire lorsque $P = \gamma \times \dots \times \gamma$. La naturalité s'exprime ainsi: soit $\phi: T' \rightarrow T$ un homomorphisme de tores, P' un T' -fibré principal de base X' , et $\phi P' \rightarrow P$ un morphisme de T -fibrés principaux induisant une application $f: X' \rightarrow X$ des bases. Alors $f^* \circ \tau_P = \tau_{P'} \circ \phi^*$, ce qui résulte de la naturalité de μ_P et ν_T .

4. CLASSES DE CHERN D'UN FIBRÉ VECTORIEL COMPLEXE
ASSOCIÉ A UN G-FIBRÉ PRINCIPAL

(G groupe de Lie réel compact)

Considérons un fibré vectoriel sur X de la forme $\xi = P[\mathbf{C}^n]$, où P est un G -fibré principal et \mathbf{C}^n le G -espace d'une représentation $\phi : G \rightarrow U_n$. Soit T un tore contenu dans G . On peut supposer à une conjugaison près,

que $\phi(T) \subset T'$ où T' est le tore maximal $\begin{pmatrix} U_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & U_1 \end{pmatrix}$ de U_n .

Si $q : E(P)/T \rightarrow X$ est l'application canonique $xT \mapsto \pi(x)$, on sait que $q^*\xi$ est associé au T -fibré principal P_T , \mathbf{C}^n étant cette fois le T -espace déterminé par $\phi|_T$. Le j^{ieme} facteur \mathbf{C}_i de \mathbf{C}^n est le T -espace de la représentation $\phi_i = p_i \circ \phi|_T \in \text{Hom}(T, U_1)$, p_i étant la projection de T' sur le i^{eme} facteur. Le T -espace \mathbf{C}^n étant somme directe des T -espaces \mathbf{C}_i , on a $q^*\xi = \bigoplus_i P_T[\mathbf{C}_i]$. En posant $\xi_i = P_1[\mathbf{C}_i]$ on a $c(\xi_i) = 1 + \chi(\xi_i)$ et $\chi(\xi_i) = \mu_{P_T}(\phi_i) = \tau_{P_T}(\omega_i)$; avec $\omega_i = \nu(\phi_i) \in H^1(T; \mathbf{Z})$. Donc $c(q^*\xi) = \prod_i c(\xi_i) = \prod_i (1 + \tau_{P_T}(\omega_i))$ c'est-à-dire:

$$q^*(c(\xi)) = \prod_i (1 + \tau_P \omega_i) \in H^*(E(P)/T; \mathbf{Z})$$

Remarques :

1) Si $G = U_m$, $T = \begin{pmatrix} U_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & U_1 \end{pmatrix}$, $(U_1 \dots U_1)$, alors q^* est injectif en ver-

tu du *principe de clivage* (cf. appendice) appliqué au fibré vectoriel $\zeta = P[\mathbf{C}^m]$, où \mathbf{C}^m est le U_m -espace canonique. En effet, $E(P)/T$ n'est autre que l'espace $DU(\zeta)$ (cf. appendice, remarque 1), homotopiquement équivalent à l'espace $D(\zeta)$ des drapeaux de ζ .

2) Si $G = U_n$, $\phi =$ identité,

$$T = \begin{pmatrix} U_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & U_1 \end{pmatrix}$$

alors ξ_i n'est autre qu'un des fibrés vectoriels obtenus par le principe de clivage appliqué à ξ . Dans ce cas $\phi_i = p_i$ et $\alpha(p_i)$ est la fonction coordonnée x_i sur l'algèbre de Lie \mathbf{R}^n de T .

3) On peut obtenir la formule ci-dessus sans utiliser la factorisation $q^*\xi = \bigoplus \xi_i$, mais seulement en utilisant 2) et la naturalité de la transgression. En effet, factorisons q en

$$E(P)/T \xrightarrow{r} E(\phi P)/T' \xrightarrow{s} X$$

où $r(xT) = (x \times 1)T'$ pour $x \in E(P)$ et $s(yT') = yU_n$ pour $y \in E(\phi P)$. Comme $E(\phi P/T')$ est homotopiquement équivalent à l'espace des drapeaux $D(\xi)$, on a

$$s^*(c(\xi)) = \prod_{\phi T'} (1 + \tau_P \circ v(p_i))$$

d'après 2). Par naturalité de la transgression,

$$r^* \circ s^*(c(\xi)) = \prod_T (1 + \tau_P \circ \phi^* \circ v(p_i)),$$

donc

$$q^*(c(\xi)) = \prod_T (1 + \tau_P \circ v(\phi_i)) = \prod_T (1 + \tau_P(\omega_i))$$

en posant $\phi_i = p_i \circ \phi$ et $\omega_i = v(\phi_i)$.

5. CLASSE DE CHERN D'UN ESPACE HOMOGÈNE PRESQUE COMPLEXE

En utilisant les notations du §1, soit G/U un espace homogène, dont le fibré tangent ξ est muni d'une structure complexe J invariante par G . On va chercher les composantes irréductibles de la représentation isotrope complexe ι^J restreinte à un tore T contenu dans U . On désignera par g et u les algèbres de Lie de G et U .

On va d'abord voir que ι^J est induite par $Ad : G \rightarrow Aut_{\mathbf{R}} g$, cette dernière étant définie par $g \mapsto d\sigma_g(1)$, où σ_g est l'automorphisme intérieur de G déterminé par $g \in G$. En effet, si $\pi : G \rightarrow G/U$ est l'application canonique, on a $d\pi(1) \circ Ad u = d(\pi \circ \sigma_u)(1) = \iota(u) \circ d\pi(1)$ pour $u \in U$, puisque $\pi \circ \sigma_u(g) = ugU = u \circ \pi(g)$, en interprétant u comme translation à gauche de G/U . Donc $Ad u, u \in U$, est un automorphisme de la suite exacte $0 \rightarrow u \rightarrow g \xrightarrow{d\pi} (G/U)_0 \rightarrow 0$, induisant l'automorphisme $\iota(u)$ de $(G/U)_0$. Complexifions cette suite exacte. Alors:

1) La représentation $\iota^J \otimes 1$ de U dans $(G/U)_0 \otimes \mathbf{C}$ est équivalente à $\iota^{-J} \oplus \iota^J$, où ι^J est la représentation conjuguée de ι^J . Cela résulte du fait que

si V est un espace vectoriel complexe de base (e_k) , $V \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ admet la \mathbf{C} -base $\varepsilon_k = e_k \otimes 1 - ie_k \otimes i$, $\varepsilon'_k = e_k \otimes 1 + ie_k \otimes i$. Etant donné un \mathbf{C} -automorphisme u de V par $u(e_k) = \sum_j u_{jk} e_j$, on a

$$u \otimes 1(\varepsilon_k) = \sum_j u_{jk} \varepsilon_j \quad \text{et} \quad u \otimes 1(\varepsilon'_k) = \sum_j \overline{u_{jk}} \varepsilon'_j.$$

2) Si T est un tore maximal dans G , donc aussi dans U , alors $u \otimes \mathbf{C}$ admet un supplémentaire V dans $\mathfrak{g} \otimes \mathbf{C}$ invariant par $Ad \otimes 1 \mid T$. En effet, l'algèbre de Lie $\mathfrak{t} = \mathbf{R}^n$ de T devient une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{t} \otimes \mathbf{C}$ de $\mathfrak{u} \otimes \mathbf{C}$ et $\mathfrak{g} \otimes \mathbf{C}$ simultanément. Le théorème de structure $\mathfrak{g} \otimes \mathbf{C} = (\mathfrak{t} \otimes \mathbf{C}) \oplus \bigoplus_{\alpha} V_{\alpha}$, où α décrit l'ensemble $R(G)$ des racines de G , et $\mathfrak{u} \otimes \mathbf{C} = (\mathfrak{t} \otimes \mathbf{C}) \oplus \bigoplus_{\beta} V_{\beta}$, où β décrit $R(U)$, montre que l'espace vectoriel $V = \bigoplus_{\alpha \in R(G) - R(U)} V_{\alpha}$ est un supplémentaire de $\mathfrak{u} \otimes \mathbf{C}$, invariant par $ad \mid \mathfrak{t} \otimes \mathbf{C}$. Toute racine α est une forme \mathbf{C} -linéaire sur $\mathfrak{t} \otimes \mathbf{C}$ dont la restriction à \mathfrak{t} est égale à $i\alpha_R$, α_R étant une forme \mathbf{R} -linéaire sur $\mathfrak{t} = \mathbf{R}^n$. Il existe une base (e_{α}) de V , $e_{\alpha} \in V_{\alpha}$, par rapport à laquelle la matrice de $ad x$, $x \in \mathbf{R}^n$, est

$$\begin{pmatrix} i\alpha_R(x) & & 0 \\ & -i\alpha_R(x) & \\ 0 & & \dots \end{pmatrix}$$

Comme $Ad(\exp ix)$ est la matrice exponentielle de cette dernière, on voit d'une part que V est invariant par $Ad(t) \otimes 1$, $A t = \exp ix \in T$, et d'autre part que les composantes irréductibles de $Ad \mid T$ sont données par les homomorphismes $t = \exp ix \mapsto \exp i\alpha_R(x)$ de T dans U_1 .

D'après ce qui précède, si T est maximal dans G , les représentations $\iota^J \otimes \iota^J \mid T$ et $Ad \otimes 1 \mid T$ sont équivalentes. Donc les composantes irréductibles ι_{α}^J de ι^J sont celles de $Ad \otimes 1 \mid T$ prises seulement avec l'un des signes $+$ ou $-$. Elles correspondent à un ensemble de racines positives. La donnée de ces signes détermine d'ailleurs la structure complexe J de $(G/U)_0$, en vertu de $\dim V_{\alpha} = 1$. En posant $\omega_{\alpha}^J = \nu(\iota_{\alpha}^J)$, on a la

Proposition : Soit G/U un espace homogène presque complexe, tel que U contienne un tore maximal T dans G . Alors, si $q : G/T \rightarrow G/U$ est l'application canonique, on a $q^*(c(G/U)) = \prod (1 + \tau_{G/T}(\omega_{\alpha}^J))$ où α parcourt les racines positives de $R(G) - R(U)$ et $c(G/U)$ est la classe totale de Chern du fibré tangent ξ à G/U , muni de la structure complexe invariante J .

Preuve : Il suffit de se rappeler que ξ^J est associé au U -fibré principal G_U par la représentation ι^J de U , et d'appliquer la formule trouvée au § 4.

Convention d'écriture : On écrit seulement $-\alpha_{\mathbf{R}}^J$ au lieu de $\tau_{G_T}(\omega_{\alpha}^J)$, de sorte que la formule précédente devient

$$q^*(c(G/U)) = \prod (1 - \alpha_{\mathbf{R}}^J).$$

Exemple :

Reprenons PC^n (cf. §1), pour lequel on sait que $\alpha_{\mathbf{R}}^J = x_{\alpha} - x_1$, $\alpha > 1$, donc $q^*(c(PC^n)) = \prod_{\alpha > 1} (1 + x_1 - x_{\alpha})$. Considérons \mathbf{C}^{n+1} comme fibré vectoriel ζ sur un point a . En composant $q : U_{n+1}/T \rightarrow PC^n$ avec l'application constante $s : PC^n \rightarrow a$, on obtient l'application constante $r : U_{n+1}/T \rightarrow a$. D'après la remarque 2) du §4, $s^*(c(\zeta))$ s'écrit $\prod_{i=1} (1 - x_i)$. Donc $\prod_{i=1} (1 - x_i) = 1$ dans $A = H^*(U_{n+1}/T; \mathbf{Z})$, puisque $c(\zeta) = 1$. D'où l'identité $\prod (X - x_i) = X^n$ dans l'anneau des polynômes en X à coefficients dans A . En substituant $1 + x_1$ à X , on obtient $q^*(c(PC^n)) = (1 + x_1)^n$. On a $\xi = \xi' \oplus \xi''$, avec ξ' de rang 1, puisque ξ est associé à un $U_1 \times U_n$ - fibré principal par ι^J , et ξ' n'est autre que $r^* \zeta$, c'est-à-dire par construction γ . Donc $x_1 = q^*(t)$, où t engendre $H^2(PC^n; \mathbf{Z})$. Comme q^* est injectif en vertu du principe de clivage, on en tire $c(PC^n) = (1 + t)^n$.

On trouvera de profondes applications de la proposition dans [4].

APPENDICE: le principe de clivage

Soit ξ un fibré vectoriel complexe de rang n sur un espace connexe X . Considérons l'espace $P(\xi)$ des droites contenues dans les fibres de ξ , ainsi que la projection $q : P(\xi) \rightarrow X$ induite par $\pi : E(\xi) \rightarrow X$.

Alors :

1) $q^*\xi$ contient le sous-fibré λ de rang 1, déterminé par les couples $(d, x) \in P(\xi) \times E(\xi)$ avec $x \in d$, de sorte que $q^*\xi \approx \lambda \oplus \xi'$;

2) $q^* : H^*(X) \rightarrow H^*(P(\xi))$ est injectif pour les coefficients entiers.

Pour prouver 2), considérons le produit tensoriel externe $\xi \hat{\otimes} \eta$ sur $X \times PC^k$, $k \geq n$, où η est le fibré vectoriel canonique de rang 1 sur PC^k . Si $(\xi \hat{\otimes} \eta)_0$ est le complémentaire de la section nulle, on a une application

$f: (\xi \hat{\otimes} \eta)_0 \rightarrow P(\xi)$ associant à $x \otimes z$ la droite passant par xz dans ξ . Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (\xi \hat{\otimes} \eta)_0 & \xrightarrow{f} & P(\xi) \\ \pi \times \pi' \downarrow & & \downarrow q \\ X \times PC^k & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

est évidemment commutatif. On va montrer que $(p \circ (\pi \times \pi'))^*$ est injectif, ce qui impliquera 2) en vertu de la relation $f^* \circ q^* = (p \circ (\pi \times \pi'))^*$. Ecrivons la suite exacte de Gysin du fibré vectoriel $\xi \hat{\otimes} \eta$:

$$\begin{aligned} H^{i-2n}(X \times PC^k) & \xrightarrow[\chi(\xi \hat{\otimes} \eta)]{\text{mult. par}} H^i(X \times PC^k) \xrightarrow{(\pi \times \pi')^*} \\ & \longrightarrow H^i(\xi \hat{\otimes} \eta)_0 \rightarrow H^{i-2n+1}(X \times PC^k) \end{aligned}$$

Comme $H^*(X \times PC^k) \approx H^*(X)[t]/t^{k+1}$ en vertu de la formule de Künneth (c'est ici que les coefficients entiers jouent un rôle) et p^* applique $H^i(X)$ identiquement sur les constantes de degré total i dans $H^*(X)[t]/t^{k+1}$, on doit donc montrer que ces dernières ne sont pas divisibles par $\chi(\xi \hat{\otimes} \eta)$, en utilisant l'exactitude de la suite ci-dessus. Ecrivons $\chi(\xi \hat{\otimes} \eta) = a_n + a_{n-1}t + \dots + a_0t^n$ avec $a_i \in H^{2(n-i)}(X)$. Si x est un point de X , alors $\xi \hat{\otimes} \eta|_{x \times PC^k} \approx \mathbf{C}^n \hat{\otimes} \eta \approx \eta \oplus \dots \oplus \eta$, par naturalité de la classe d'Euler, l'injection $i: x \times PC^k \rightarrow X \times PC^k$ vérifie $i^* \chi(\xi \hat{\otimes} \eta) = \chi(\eta \oplus \dots \oplus \eta) = t^n$, puisque $X(\eta) = t$ par définition. Mais $i^*(a_j) = 0$ pour $j > 0$ et $i^*(a_0) = a_0$, donc $a_0 = 1$. Cela implique la non divisibilité en question.

En faisant subir à ξ' la même opération qu'à ξ , et ainsi de suite, on obtient:

si $D(\xi)$ désigne l'espace des drapeaux de ξ , formé des suites ordonnées de n droites linéairement indépendantes dans les fibres de ξ , et $q: D(\xi) \rightarrow X$ la projection induite par celle de ξ , alors:

1) $q^*\xi \approx \bigoplus_{i=1}^n \lambda_i$ avec rang $\lambda_i = 1$;

2) $q^*: H^*(X) \rightarrow H^*(D(\xi))$ est injectif pour les coefficients entiers.

Remarques :

1) $D(\xi)$ est homotopiquement équivalent à l'espace $DU(\xi)$ des suites ordonnées de n droites orthogonales dans les fibres de ξ , relativement à un

produit scalaire quelconque dans ξ , paramétré par les fibres. Si P est le U_n -fibré principal formé par les bases orthonormées de ξ , alors $DU(\xi) = E(P)/T$, avec

$$T = \begin{pmatrix} U_1 & & 0 \\ & \cdot & \\ 0 & & U_1 \end{pmatrix}.$$

2) Le principe de clivage reste valable pour les fibrés vectoriels réels, à condition de remplacer les coefficients entiers par Z_2 . En effet, dans la démonstration ci-dessus, on doit remplacer PC^k par PR^k et la formule de Künneth ne reste juste que pour les coefficients Z_2 . (Rappelons que $H^i(PR^k; Z) \approx Z_2$ pour i impair $< k$).

RÉFÉRENCES

- [1] CHEVALLEY, C. *Theory of Lie groups*.
- [2] SERRE, J.-P. *Algèbres de Lie semi-simples complexes*.
- [3] HUSEMOLLER, D. *Fibre bundles*.
- [4] BOREL, A. and F. HIRZEBRUCH. « Characteristic classes and homogeneous spaces I, II, III ». *Am. J. of Math.* 1958, 59, 60.
- [5] STEENROD, N. *The topology of fibre bundles*.

(Reçu le 18 mars 1969)

Serge Maumary
 Institute for Advanced Studies
 Princeton, New-Jersey
 U. S. A.