1. Donnée du problème

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **14 (1968)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

CLASSES DE CHERN D'UN ESPACE HOMOGÈNE PRESQUE COMPLEXE

par S. MAUMARY *

1. Donnée du problème

Soit G un groupe de Lie compact réel, U un sous-groupe fermé, et G/U l'espace des classes à droite gU, $g \in G$. Ce dernier est une variété différentiable réelle compacte, dont on désignera l'espace tangent au point $0 = U \in G/U$ par $(G/U)_0$. Considérons la représentation isotrope $\iota(u) = du(0) \in \mathrm{Aut}_R (G/U)_0$, $u \in U$ étant interprété comme translation à gauche de G/U. Cette représentation détermine le fibré tangent ξ à G/U: l'application $G \times (G/U)_0 \to E(\xi)$, donnée par $(g, v) \mapsto dg(v)$, en interprétant $g \in G$ comme translation à gauche de G/U, devient un homéomorphisme si l'on identifie (gu, v) avec $(g, \iota(u)v)$.

Supposons que ξ soit muni d'une structure complexe J, invariante par G. Autrement dit, J est un $\mathbf{R}$-automorphisme de ξ, tel que $J^2 = -$identité et $J \circ dg = dg \circ J$, en interprétant $g \in G$ comme translation à gauche de G/U. Cette dernière égalité montre que J est déterminée par sa restriction à la fibre $(G/U)_0$ et que celle-ci est invariante par $\iota(u)$, $u \in U$. On écrira ξ^J le fibré ξ muni de la structure complexe J. La représentation réelle ι se factorise alors canoniquement par une représentation complexe $\iota^J : U \to \mathrm{Aut}_C (G/U)_o^J$, qui détermine ξ^J comme précédemment.

Prenons un tore $T \subset U$, et soit $q : G/T \to G/U$ l'application canonique $gT \mapsto gU$. La restriction $\iota \mid T$ détermine $q^*\xi$: l'application $G \times (G/U)_0 \to E(q^*\xi)$, donnée par $(g, v) \mapsto (gT, dg(v))$, devient un homéomorphisme si l'on identifie (gt, v) avec $(g, \iota(t)v)$, $\forall\, t \in T$. Maintenant, $\iota^J \mid T$ est somme directe de représentations complexes ϕ_α^J de rang 1, donc $q^*\xi^J$ est somme directe de fibrés vectoriels complexes ξ_α^J de rang 1, déterminé par ϕ_α^J. La classe totale de Chern $c(\xi^J) \in H^*(G/U; \mathbf{Z})$ vérifie donc

$$q^*(c(\xi^J)) = c(q^*\xi^J) = \prod_\alpha c(\xi_\alpha^J) = \prod_\alpha \left(1 + \chi(\xi_\alpha^J)\right) \in H^*(G/T; \mathbf{R}) .$$

*) Conférence donnée à la réunion des mathématiciens suisses aux Plans-sur-Bex mars 1968.

Comment la classe d'Euler $\chi(\xi_\alpha^J)$ est-elle déterminée par ϕ_α^J ? Si T est un tore maximal dans G, on pourra donner une réponse complète.

En ce qui concerne les classes caractéristiques, on suppose seulement que l'on connaît, pour tout fibré vectoriel réel orienté, sa classe d'Euler, sa suite exacte de Gysin et l'existence d'une application classifiante.

Exemple :

Si $G = U_{n+1}$ (groupe unitaire à $n+1$ variables), et

$$U = \left(\begin{array}{c|c} U_1 & 0 \\ \hline 0 & U_n \end{array}\right),$$

l'application $G/U \to P\mathbf{C}^n$ induite par $g \mapsto g(1, 0, \ldots, 0)$, $g \in G$, est un difféomorphisme. Mais la variété $P\mathbf{C}^n$ admet une structure complexe invariante par G, donnée au voisinage de $(1 : 0 : \ldots : 0)$ par la carte $(1 : z_2 : \ldots : z_{n+1}) \mapsto$ $\to (z_2, \ldots, z_{n+1})$. Soit J la structure complexe invariante induite sur le fibré tangent réel ξ à $P\mathbf{C}^n$. Alors ξ^J est le fibré tangent complexe.

Soit

$$T = \begin{pmatrix} U_1 & & O \\ & U_1 & \\ O & & \ddots \; U_1 \end{pmatrix} = U_1 \times \ldots \times U_1$$

le tore dans U, qui est d'ailleurs maximal dans G. Par définition, $\iota^J(\exp ix_1, \ldots, \exp ix_{n+1})$, $x_\alpha \in \mathbf{R}$, est la différentielle complexe de la translation

$$(1 : z_2 : \ldots : z_{n+1}) \mapsto (exp\ ix_1 : z_2\ exp\ ix_2 : \ldots : z_{n+1}\ exp\ ix_{n+1}) =$$

$$(1 : z_2\ exp\ i(x_2 - x_1) : \ldots : z_{n+1}\ exp\ i(x_{n+1} - x_1))$$

au point $(1 : 0 : \ldots : 0)$. Dans la carte ci-dessus, on a donc

$$\iota^J(exp\ ix_1, \ldots, exp\ ix_{n+1})(z_\alpha) = z_\alpha\ exp\ i(x_\alpha - x_1)\,,\quad \alpha > 1\,.$$

Donc

$$\phi_\alpha^J(exp\ ix_1, \ldots, exp\ ix_{n+1})(z_\alpha) = z_\alpha\ exp\ i(x_\alpha - x_1)\,.$$

2. Extension des fibrés principaux

Etant donné un groupe de Lie compact réel G, un G-fibré principal P est défini par un espace $E(P)$ muni d'une action *libre* et continue de G, à droite, et par une projection $\pi : E(P) \to B(P)$ sur un espace de base compact $B(P)$, telle que $\pi(x) = \pi(y) \Leftrightarrow x \in y\,G$. Un morphisme de G-fibrés prin-