Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 14 (1968)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: CLASSES DE CHERN D'UN ESPACE HOMOGÈNE PRESQUE COMPLEXE

Autor: Maumary, S.

Kapitel: 3. Interprétations des représentations complexes irréductibles d'un tore T

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-42358

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 17.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

gauche de G/U. On a évidemment $f(gu) = f(g)\,\iota(u)$ pour $u \in U$, donc f détermine un isomorphisme $\iota(G_U) \approx P'$. Il en résulte l'isomorphisme annoncé $G_U\,[\mathbf{R}^n] \approx \xi$.

Corollaire : Dans les conditions du lemme, soient T un sous-groupe de U, et $q : G/T \to G/U$ l'application canonique $gT \mapsto gU$. Alors $q^*\xi$ est le fibré $G_T\,[\mathbf{R}^n]$, $\mathbf{R}^n$ étant le T-espace déterminé par $\iota \mid T$.

Preuve : On a déjà vu que q^*G_U est la i-extension de G_T. Or $q^*\xi$ est associé au 0_n-fibré principal q^*P', donc$q^*P' \approx q^*({}_\iota G_U) = \iota(q^*G_U) = {}_\iota(G_T)$. Il en résulte que $q^*\xi \approx G_T\,[\mathbf{R}^n]$, pour l'action $\iota \mid T$ de T sur $\mathbf{R}^n$.

3. Interprétations des représentations complexes irréductibles d'un tore T

Tout homomorphisme différentiable $h : U_1 \to U_1$ est de la forme $h(\exp ix) = \exp iax$, $a \in \mathbf{Z}$. Cela résulte du fait que la différentielle d'une translation à gauche τ_g de U_1 est en tout point l'identité $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, ce qui implique $dh(g) = dh(1), g \in U_1$, en vertu de $dh(g) \circ d\,\tau_g(1) = d(h \circ \tau_g)(1) = d(\tau_{(hg)} \circ h)(1)$. Alors h est nécessairement de la forme ci-dessus, avec $a \in \mathbf{R}$. Mais si $x \in \mathbf{Z}$, on doit avoir $ax \in \mathbf{Z}$, c'est-à-dire $a \in \mathbf{Z}$. Plus généralement, si $T = U_1 \times \ldots \times U_1$ et si $k_j : U_1 \to T$ applique $\exp ix$ sur $(1, \ldots 1, \exp ix, 1, \ldots 1)$, tout homomorphisme $h : T \to U_1$ est de la forme $h(\exp ix_1, \ldots \exp ix_n) = \prod_j h \circ k_j(\exp ix_j) = \prod_j \exp i\,a_j x_j = \exp i\,(a_1x_1 + \ldots + a_nx_n)$, $a_j \in \mathbf{Z}$. D'où une bijection canonique $\alpha : \mathrm{Hom}\,(T, U_1) \approx \mathbf{Z}^n$, $\alpha(h) = (a_j)$. Par ailleurs, $\mathrm{Hom}\,(T, U_1)$ est un groupe abélien pour la multiplication des homomorphismes, et l'on voit aussitôt que α est un isomorphisme de groupes. En composant α avec l'inclusion $\mathbf{Z}^n \to \mathrm{Hom}_R\,(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ donnée par $(a_j) \to a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$, on obtient l'homomorphisme injectif $h \mapsto dh\,(1, \ldots, 1)$ de $\mathrm{Hom}\,(T, U_1)$ dans le dual de l'algèbre de Lie $\mathfrak{t} = \mathbf{R}^n$ de T. En particulier, si p_j est la projection de T sur son j^{ieme} facteur, $\alpha\,(P_j)$ est la fonction coordonnée x_j sur $\mathbf{R}^n$.

Considérons maintenant les groupes de cohomologie $H^1\,(T; \mathbf{Z})$ et $H^1\,(U_1; \mathbf{Z})$, où l'on suppose U_1 orienté de la manière habituelle. Alors $H^1\,(U_1; \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$, donc tout $h \in \mathrm{Hom}\,(T, U_1)$ détermine un élément $h^*(1) \in H^1\,(T; \mathbf{Z})$, h^* étant l'homomorphisme $H^1\,(U_1; \mathbf{Z}) \to H^1\,(T; \mathbf{Z})$ induit par h. On obtient ainsi un homomorphisme naturel $\nu_T : \mathrm{Hom}\,(T, U_1) \to H^1\,(T; \mathbf{Z})$.

En effet, si h et h' sont deux homomorphismes de T dans U_1, considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} U_1 \times U_1 \arrow[r, shift left=4, "m"] \arrow[r, shift left=2, dashed, "p_1"] \arrow[r, shift right=2, "p_2"] & U_1 \arrow[l, shift right=2, "k_1"'] \arrow[l, shift right=4, "k_2"'] \end{tikzcd} \qquad p_i = {}^{ieme} \text{ composante}$$

où $k_1(e^{i\theta}) = (e^{i\theta}, 1)$, $k_2(e^{i\theta}) = (1, e^{i\theta})$, et $m(e^{i\theta}, e^{i\theta'}) = e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$. Comme $mk_1 = mk_2 =$ identité, on a $k_1^* m^*(1) = k_2^* m^*(1) = 1$ dans $H^1(U_1; \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$. Donc $(k_1 p_1)^* m^*(1) = p_1^*(1)$, $(k_2 p_2)^* m^*(1) = p_2^*(1)$ dans $H^1(U_1 \times U_1; \mathbf{Z})$. Mais la formule de Künneth $H^1(U_1 \times U_1; \mathbf{Z}) \approx H^1(U_1; \mathbf{Z}) \oplus H^1(U_1; \mathbf{Z})$ dit précisément que tout élément $\alpha \in H^1(U_1 \times U_1; \mathbf{Z})$ s'écrit de manière unique $\alpha = (k_1 p_1)^* \alpha + (k_2 p_2)^* \alpha$. En particulier $m^*(1) = p_1^*(1) + p_2^*(1)$, donc si hh' est l'homomorphisme produit $m \circ (h \times h')$, on a $(hh')^*(1) = h^*(1) + h'^*(1)$, c'est-à-dire $v_T(hh') = v_T(h) + v_T(h')$. La naturalité de v_T s'exprime ainsi: pour tout homomorphisme de tores $\phi : T' \to T$, on a $\phi^* \circ v = v \circ \phi^*$, où le premier ϕ^* est l'homomorphisme induit $H^1(T; \mathbf{Z}) \to H^1(T'; \mathbf{Z})$, tandis que le second est l'homomorphisme induit $\mathrm{Hom}(T; U_1) \to \mathrm{Hom}(T'; U_1)$. Cela résulte aussitôt de l'égalité $(h \circ \phi)^*(1) = \phi^*(h^*(1))$.

Lemme : v_T est un isomorphisme.

Preuve : Dans le cas $T = U_1$, v est un homomorphisme $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ tel que $v(1) = 1$ En général, on a des isomorphismes canoniques $\mathrm{Hom}(T, U_1) \approx \oplus \mathrm{Hom}(U_1, U_1)$ et $H^1(T; \mathbf{Z}) \approx \oplus H^1(U_1; \mathbf{Z})$ (formule de Künneth). Avec ces décompositions, la j^{ieme} composante de $h \in \mathrm{Hom}(T, U_1)$ est $h \circ k_j$ et celle de $h^*(1)$ est $k_j^* \circ h^*(1) = (h \circ k_j)^*(1)$. Donc v se décompose en somme directe d'isomorphismes.

Considérons maintenant un T-fibré principal P de base $B(P) = X$. Pour tout $h \in \mathrm{Hom}(T, U_1)$, on peut construire le fibré vectoriel de rang 1 $\xi_h = P[\mathbf{C}]$, où $\mathbf{C}$ est le T-espace déterminé par h. Sa classe d'Euler $\chi(\xi_h)$ est un élément de $H^2(X; \mathbf{Z})$. De cette manière, on obtient un homomorphisme naturel $\mu_P : \mathrm{Hom}(T, U_1) \to H^2(X; \mathbf{Z})$. En effet, si h et h' sont deux homomorphismes de T dans U_1, et hh' l'homomorphisme produit, on a un isomorphisme canonique de fibrés vectoriels $\xi_h \otimes \xi_{h'} \approx \xi_{hh'}$, qui associe à tout vecteur $(x \underset{U_1}{\times} z) \otimes (x \underset{U_1}{\times} z')$ de $\xi_h \otimes \xi_{h'}$, le vecteur $x \underset{U_1}{\times} zz'$ de $\xi_{hh'}$. Mais d'une manière générale pour deux fibrés vectoriels complexes ξ et ξ' de rang 1 sur X, on a $\chi(\xi \otimes \xi') = \chi(\xi) + \chi(\xi')$. On le voit en utilisant des

applications classifiantes pour χ et χ, et en vérifiant que $\chi(\eta \hat{\otimes} \eta) = \chi(\eta) \oplus \chi(\eta)$, où $\hat{\otimes}$ désigne le produit tensoriel externe sur $P\mathbf{C}^1 \times P\mathbf{C}^1$: si x est un point fixé de $P\mathbf{C}^1$, on a $\eta \hat{\otimes} \eta \mid x \times P\mathbf{C}^1 \cong \eta$ et de même $\eta \hat{\otimes} \eta \mid P\mathbf{C}^1 \times y \cong \eta$. Donc, si k_1 et k_2 désignent les inclusions $P\mathbf{C}^1 \to P\mathbf{C}^1 \times P\mathbf{C}^1$, $k_1(y) = (y, x)$, $k_2(y) = (x, y)$, on a $k_1^* \chi(\eta \hat{\otimes} \eta) = k_2^* \chi(\eta \hat{\otimes} \eta) = \chi(\eta)$. Mais on a l'isomorphisme de Künneth $H^2(P\mathbf{C}^1 \times P\mathbf{C}^1; \mathbf{Z}) \cong H^2(P\mathbf{C}^1; \mathbf{Z}) \oplus H^2(P\mathbf{C}^1; \mathbf{Z})$ donné par $\alpha \to k_1^*(\alpha) \oplus k_2^*(\alpha)$, puisque $H^1(P\mathbf{C}^1; \mathbf{Z}) = 0$ en vertu de la suite exacte de Gysin de η. La naturalité de μ_P s'exprime comme suit: soient $\phi : T' \to T$ un homomorphisme de tores, P' un T'-fibré principal, P un T-fibré principal et ${}_\phi P' \to P$ un morphisme de T-fibrés principaux. Si $f : X' \to X$ est l'application induite entre les bases, alors $f^* \circ \mu_P = \mu_{P'} \circ \phi^*$. En effet: $f^*(\xi_h) = f^* P[\mathbf{C}]$ et $f^* P \approx {}_\phi P'$, donc $f^*(\xi_h) = {}_\phi P'[\mathbf{C}]$, où $\mathbf{C}$ est le T-espace déterminé par h Mais ${}_\phi P'[\mathbf{C}] = P'[\mathbf{C}]$, où $\mathbf{C}$ au second membre est leT'-espace dé terminé. par $h \circ \phi$. Donc $\chi(f^* \xi_h) = \chi(\xi_{h \circ \phi})$, et il suffit de rappeler que $\chi(f^* \xi_h) = f^* \chi(\xi_h)$.

Lemme: Pour le T-fibré principal $\gamma \times \gamma \times \ldots \times \gamma$ sur $B_T = P\mathbf{C}^n \times \times \ldots \times P\mathbf{C}^n$, $\mu_{\gamma \times \ldots \times \gamma}$ est un isomorphisme.

Preuve: Envisageons d'abord le cas $T = U_1$. Pour $h =$ identité: $U_1 \to U_1$, ξ_h est le fibré canonique η et $\chi(\eta)$ engendre $H^2(P\mathbf{C}^n; \mathbf{Z})$ en vertu de la suite de Gysin de η. Donc μ_γ est surjectif. Comme $H^2(P\mathbf{C}^n; \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$ en vertu de la même suite exacte, μ_γ est nécessairement injectif.

En général, on a des isomorphismes canoniques $\mathrm{Hom}(T, U_1) \approx \oplus \mathrm{Hom}(U_1, U_1)$ et $H^2(B_T; \mathbf{Z}) \approx \oplus H^2(P\mathbf{C}^n; \mathbf{Z})$ (formule de Künneth). Avec ces décompositions, la j^{ieme} composante de $h \in \mathrm{Hom}(T, U_1)$ est $h \circ k_j$, et celle de $\chi(\xi_h)$ est $k_j^* \chi(\xi_h)$, où k_j désigne cette fois l'application identité de $P\mathbf{C}^n$ sur $x \times \ldots x \times P\mathbf{C}^n \times x \ldots \times x \subset B_T$, qui est d'ailleurs telle que $k_j^*(\gamma \times \ldots \times \gamma) = {}_{kj}\gamma$. Comme $k_j^* \chi(\xi_h) = \chi(k_j^* \xi_h) = \chi({}_{h \circ k_j}\gamma[\mathbf{C}])$, on a décomposé $\mu_{\gamma \times \ldots \times \gamma}$ en somme directe d'isomorphismes.

Définition: On appelle *transgression* dans un T-fibré principal P de base X l'homomorphisme composé $\tau_P = \mu_P \nu_T^{-1} : H^1(T; \mathbf{Z}) \to H^2(X; \mathbf{Z})$. Elle est naturelle et c'est un isomorphisme lorsque P est universel, c'est-à-dire lorsque $P = \gamma \times \ldots \times \gamma$. La naturalité s'exprime ainsi: soit $\phi : T' \to T$ un homomorphisme de tores, P' un T'-fibré principal de base X', et ${}_\phi P' \to P$ un morphisme de T-fibrés principaux induisant une application $f : X' \to X$ des bases. Alors $f^* \circ \tau_P = \tau_{P'} \circ \phi^*$, ce qui résulte de la naturalité de μ_P et ν_T.