4. Classes de Chern d'un fibré vectoriel complexe associé a un G-fibré principal

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **14 (1968)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

4. Classes de Chern d'un fibré vectoriel complexe associé a un G-fibré principal

(*G* groupe de Lie réel compact)

Considérons un fibré vectoriel sur X de la forme $\xi = P\,[\mathbf{C}^n]$, où P est un G-fibré principal et $\mathbf{C}^n$ le G-espace d'une représentation $\phi : G \to U_n$. Soit T un tore contenu dans G. On peut supposer à une conjuguaison près,

que $\phi\,(T) \subset T'$ où T' est le tore maximal $\begin{pmatrix} U_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & U_1 \end{pmatrix}$ de U_n.

Si $q : E\,(P)/T \to X$ est l'application canonique $xT \mapsto \pi\,(x)$, on sait que $q^*\xi$ est associé au T-fibré principal P_T, $\mathbf{C}^n$ étant cette fois le T-espace déterminé par $\phi \mid T$. Le j^{ieme} facteur $\mathbf{C}_i$ de $\mathbf{C}^n$ est le T-espace de la représentation $\phi_i = p_i \circ \phi \mid T \in \operatorname{Hom}(T, U_1)$, p_i étant la projection de T' sur le i^{eme} facteur. Le T-espace $\mathbf{C}^n$ étant somme directe des T-espaces $\mathbf{C}_i$, on a $q^*\xi = \bigoplus_i P_T\,[\mathbf{C}_i]$. En posant $\xi_i = P_1\,[\mathbf{C}_i]$ on a $c\,(\xi_i) = 1 + \chi\,(\xi_i)$ et $\chi\,(\xi_i) = \mu_{P_T}(\phi_i) = \tau_{P_T}(\omega_i)$; avec $\omega_i = \nu\,(\phi_i) \in H^1\,(T;\, \mathbf{Z})$. Donc $c\,(q^*\xi) = \prod c\,(\xi_i) = \prod (1 + \tau_{P_T}(\omega_i))$ c'est-à-dire:

$$q^*\,(c\,(\xi)) = \prod_i (1 + \tau_{P_T}\,\omega_i) \in H^*\,(E\,(P)/T;\, \mathbf{Z})$$

Remarques :

1) Si $G = U_m$, $T = \begin{pmatrix} U_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & U_1 \end{pmatrix}$, $(U_1 \ldots U_1)$, alors q^* est injectif en vertu du *principe de clivage* (cf. appendice) appliqué au fibré vectoriel $\zeta = P[\mathbf{C}^m]$, où $\mathbf{C}^m$ est le U_m-espace canonique. En effet, $E\,(P)/T$ n'est autre que l'espace $DU\,(\zeta)$(cf. appendice, remarque 1), homotopiquement équivalent à l'espace $D\,(\zeta)$ des drapeaux de ζ.

2) Si $G = U_n$, $\phi =$ identité,

$$T = \begin{pmatrix} U_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & U_1 \end{pmatrix}$$

alors ξ_i n'est autre qu'un des fibrés vectoriels obtenus par le principe de clivage appliqué à ξ. Dans ce cas $\phi_i = p_i$ et $\alpha(p_i)$ est la fonction coordonnée x_i sur l'algèbre de Lie $\mathbf{R}^n$ de T.

3) On peut obtenir la formule ci-dessus sans utiliser la factorisation $q^*\xi = \oplus\, \xi_i$, mais seulement en utilisant 2) et la naturalité de la transgression. En effet, factorisons q en

$$E(P)/T \xrightarrow{r} E({}_\phi P)/T' \xrightarrow{s} X$$

où $r(xT) = (x \times 1)\,T'$ pour $x \in E(P)$ et $s(yT') = yU_n$ pour $y \in E({}_\phi P)$. Comme $E({}_\phi P/T')$ est homotopiquement équivalent à l'espace des drapeaux $D(\xi)$, on a

$$s^*(c(\xi)) = \prod \left(1 + \tau_{\underset{\phi\ T'}{P}} \circ v(p_i)\right)$$

d'après 2). Par naturalité de la transgression,

$$r^* \circ s^*(c(\xi)) = \prod \left(1 + \tau_{\underset{T}{P}} \circ \phi^* \circ v(p_i)\right),$$

donc

$$q^*(c(\xi)) = \prod \left(1 + \tau_{\underset{T}{P}} \circ v(\phi_i)\right) = \prod \left(1 + \tau_{\underset{T}{P}}(\omega_i)\right)$$

en posant $\phi_i = p_i \circ \phi$ et $\omega_i = v(\phi_i)$.

5. Classe de Chern d'un espace homogène presque complexe

En utilisant les notations du §1, soit G/U un espace homogène, dont le fibré tangent ξ est muni d'une structure complexe J invariante par G. On va chercher les composantes irréductibles de la représentation isotrope complexe ι^J restreinte à un tore T contenu dans U. On désignera par $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{u}$ les algèbres de Lie de G et U.

On va d'abord voir que ι^J est induite par $Ad : G \to Aut_R\, \mathfrak{g}$, cette dernière étant définie par $g \mapsto d\sigma_g(1)$, où σ_g est l'automorphisme intérieur de G déterminé par $g \in G$. En effet, si $\pi : G \to G/U$ est l'application canonique, on a $d\pi(1) \circ Ad\, u = d(\pi \circ \sigma_u)(1) = \iota(u) \circ d\pi(1)$ pour $u \in U$, puisque $\pi \circ \sigma_u(g) = ugU = u \circ \pi(g)$, en interprétant u comme translation à gauche de G/U. Donc $Ad\, u$, $u \in U$, est un automorphisme de la suite exacte $0 \to \mathfrak{u} \to \mathfrak{g} \xrightarrow{d\pi} (G/U)_0 \to 0$, induisant l'automorphisme $\iota(u)$ de $(G/U)_0$. Complexifions cette suite exacte. Alors:

1) La représentation $\iota^J \otimes 1$ de U dans $(G/U)_0 \otimes \mathbf{C}$ est équivalente à $\iota^{-J} \oplus \iota^{-J}$, où ι^J est la représentation conjuguée de ι^J. Cela résulte du fait que