

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 14 (1968)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: CLASSES DE CHERN D'UN ESPACE HOMOGENÈNE PRESQUE COMPLEXE
Autor: Maumary, S.
Kapitel: Appendice: le principe de clivage
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-42358>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 30.01.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Preuve : Il suffit de se rappeler que ξ^J est associé au U -fibré principal G_U par la représentation ι^J de U , et d'appliquer la formule trouvée au § 4.

Convention d'écriture : On écrit seulement $-\alpha_{\mathbf{R}}^J$ au lieu de $\tau_{G_T}(\omega_{\alpha}^J)$, de sorte que la formule précédente devient

$$q^*(c(G/U)) = \prod (1 - \alpha_{\mathbf{R}}^J).$$

Exemple :

Reprenons PC^n (cf. §1), pour lequel on sait que $\alpha_{\mathbf{R}}^J = x_{\alpha} - x_1$, $\alpha > 1$, donc $q^*(c(PC^n)) = \prod_{\alpha > 1} (1 + x_1 - x_{\alpha})$. Considérons \mathbf{C}^{n+1} comme fibré vectoriel ζ sur un point a . En composant $q : U_{n+1}/T \rightarrow PC^n$ avec l'application constante $s : PC^n \rightarrow a$, on obtient l'application constante $r : U_{n+1}/T \rightarrow a$. D'après la remarque 2) du §4, $s^*(c(\zeta))$ s'écrit $\prod_{i=1} (1 - x_i)$. Donc $\prod_{i=1} (1 - x_i) = 1$ dans $A = H^*(U_{n+1}/T; \mathbf{Z})$, puisque $c(\zeta) = 1$. D'où l'identité $\prod (X - x_i) = X^n$ dans l'anneau des polynômes en X à coefficients dans A . En substituant $1 + x_1$ à X , on obtient $q^*(c(PC^n)) = (1 + x_1)^n$. On a $\xi = \xi' \oplus \xi''$, avec ξ' de rang 1, puisque ξ est associé à un $U_1 \times U_n$ - fibré principal par ι^J , et ξ' n'est autre que $r^* \zeta$, c'est-à-dire par construction γ . Donc $x_1 = q^*(t)$, où t engendre $H^2(PC^n; \mathbf{Z})$. Comme q^* est injectif en vertu du principe de clivage, on en tire $c(PC^n) = (1 + t)^n$.

On trouvera de profondes applications de la proposition dans [4].

APPENDICE: le principe de clivage

Soit ξ un fibré vectoriel complexe de rang n sur un espace connexe X . Considérons l'espace $P(\xi)$ des droites contenues dans les fibres de ξ , ainsi que la projection $q : P(\xi) \rightarrow X$ induite par $\pi : E(\xi) \rightarrow X$.

Alors:

1) $q^*\xi$ contient le sous-fibré λ de rang 1, déterminé par les couples $(d, x) \in P(\xi) \times E(\xi)$ avec $x \in d$, de sorte que $q^*\xi \approx \lambda \oplus \xi'$;

2) $q^* : H^*(X) \rightarrow H^*(P(\xi))$ est injectif pour les coefficients entiers.

Pour prouver 2), considérons le produit tensoriel externe $\xi \hat{\otimes} \eta$ sur $X \times PC^k$, $k \geq n$, où η est le fibré vectoriel canonique de rang 1 sur PC^k . Si $(\xi \hat{\otimes} \eta)_0$ est le complémentaire de la section nulle, on a une application

$f: (\xi \hat{\otimes} \eta)_0 \rightarrow P(\xi)$ associant à $x \otimes z$ la droite passant par xz dans ξ . Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (\xi \hat{\otimes} \eta)_0 & \xrightarrow{f} & P(\xi) \\ \pi \times \pi' \downarrow & & \downarrow q \\ X \times PC^k & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

est évidemment commutatif. On va montrer que $(p \circ (\pi \times \pi'))^*$ est injectif, ce qui impliquera 2) en vertu de la relation $f^* \circ q^* = (p \circ (\pi \times \pi'))^*$. Ecrivons la suite exacte de Gysin du fibré vectoriel $\xi \hat{\otimes} \eta$:

$$\begin{aligned} H^{i-2n}(X \times PC^k) & \xrightarrow[\chi(\xi \hat{\otimes} \eta)]{\text{mult. par}} H^i(X \times PC^k) \xrightarrow{(\pi \times \pi')^*} \\ & \longrightarrow H^i(\xi \hat{\otimes} \eta)_0 \longrightarrow H^{i-2n+1}(X \times PC^k) \end{aligned}$$

Comme $H^*(X \times PC^k) \approx H^*(X)[t]/t^{k+1}$ en vertu de la formule de Künneth (c'est ici que les coefficients entiers jouent un rôle) et p^* applique $H^i(X)$ identiquement sur les constantes de degré total i dans $H^*(X)[t]/t^{k+1}$, on doit donc montrer que ces dernières ne sont pas divisibles par $\chi(\xi \hat{\otimes} \eta)$, en utilisant l'exactitude de la suite ci-dessus. Ecrivons $\chi(\xi \hat{\otimes} \eta) = a_n + a_{n-1}t + \dots + a_0t^n$ avec $a_i \in H^{2(n-i)}(X)$. Si x est un point de X , alors $\xi \hat{\otimes} \eta|_{x \times PC^k} \approx \mathbf{C}^n \hat{\otimes} \eta \approx \eta \oplus \dots \oplus \eta$, par naturalité de la classe d'Euler, l'injection $i: x \times PC^k \rightarrow X \times PC^k$ vérifie $i^* \chi(\xi \hat{\otimes} \eta) = \chi(\eta \oplus \dots \oplus \eta) = t^n$, puisque $X(\eta) = t$ par définition. Mais $i^*(a_j) = 0$ pour $j > 0$ et $i^*(a_0) = a_0$, donc $a_0 = 1$. Cela implique la non divisibilité en question.

En faisant subir à ξ' la même opération qu'à ξ , et ainsi de suite, on obtient:

si $D(\xi)$ désigne l'espace des drapeaux de ξ , formé des suites ordonnées de n droites linéairement indépendantes dans les fibres de ξ , et $q: D(\xi) \rightarrow X$ la projection induite par celle de ξ , alors:

1) $q^*\xi \approx \bigoplus_{i=1}^n \lambda_i$ avec rang $\lambda_i = 1$;

2) $q^*: H^*(X) \rightarrow H^*(D(\xi))$ est injectif pour les coefficients entiers.

Remarques :

1) $D(\xi)$ est homotopiquement équivalent à l'espace $DU(\xi)$ des suites ordonnées de n droites orthogonales dans les fibres de ξ , relativement à un

produit scalaire quelconque dans ξ , paramétré par les fibres. Si P est le U_n -fibré principal formé par les bases orthonormées de ξ , alors $DU(\xi) = E(P)/T$, avec

$$T = \begin{pmatrix} U_1 & & 0 \\ & \cdot & \\ 0 & & U_1 \end{pmatrix}.$$

2) Le principe de clivage reste valable pour les fibrés vectoriels réels, à condition de remplacer les coefficients entiers par Z_2 . En effet, dans la démonstration ci-dessus, on doit remplacer PC^k par PR^k et la formule de Künneth ne reste juste que pour les coefficients Z_2 . (Rappelons que $H^i(PR^k; Z) \approx Z_2$ pour i impair $< k$).

RÉFÉRENCES

- [1] CHEVALLEY, C. *Theory of Lie groups*.
- [2] SERRE, J.-P. *Algèbres de Lie semi-simples complexes*.
- [3] HUSEMOLLER, D. *Fibre bundles*.
- [4] BOREL, A. and F. HIRZEBRUCH. « Characteristic classes and homogeneous spaces I, II, III ». *Am. J. of Math.* 1958, 59, 60.
- [5] STEENROD, N. *The topology of fibre bundles*.

(Reçu le 18 mars 1969)

Serge Maumary
 Institute for Advanced Studies
 Princeton, New-Jersey
 U. S. A.