

## 4.4. The finiteness theorem

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **14 (1968)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

*Remark.* If  $X$  is not separated, an intersection of two open Stein subspaces of  $X$  need not be Stein; take f.i. for  $X$  two copies of  $\mathbb{C}^2$ , identified everywhere except at  $O$ ; there is an obvious covering of  $X$  by two open subspaces, identicals with  $\mathbb{C}^2$ ; but their intersection is  $\mathbb{C}^2 - \{O\}$ , and therefore is not Stein!

#### 4.4. The finiteness theorem

*Theorem 4.4.1.* (Cartan — Serre). Let  $X$  be a compact analytic space, and  $F$  be a coherent analytic sheaf on  $X$ . Then, for every  $p \geq 0$   $H^p(X, F)$  is separated and finite dimensional.

We shall give two proofs of this theorem ; both are interesting for further applications.

*1st proof.* Let  $\{X_i\}$  and  $\{X'_i\}$  be two finite coverings of  $X$  of the type considered in the previous articles, such that, for every  $i$ ,  $X'_i$  is relatively compact in  $X_i$ . Then, if we denote by  $\mathcal{U}$  (resp.  $\mathcal{U}'$ ) the covering  $\{X_i\}$  (resp.  $\{X'_i\}$ ), the natural restriction map  $C^p(\mathcal{U}, F) \rightarrow C^p(\mathcal{U}', F)$  is compact.

Consider now the map

$$(\rho, d) : Z^p(\mathcal{U}, F) \oplus C^{p-1}(\mathcal{U}', F) \rightarrow Z^p(\mathcal{U}', F)$$

this map is surjective, and we have  $(, d\rho) = (\rho, 0) + (0, d)$ ,  $(\rho, 0)$  being compact ; then the following lemma proves that  $\text{Im}(0, d)$  is closed and finite codimensional, q.e.d.

*Lemma 4.4.2.* Let  $E$  and  $F$  two Frechet spaces,  $u_1$  and  $u_2$  two linear continuous maps  $E \rightarrow F$  such that  $u_1 + u_2$  is surjective, and  $u_1$  compact. Then  $\text{Im}(u_2)$  is closed and finite codimensional. For the proof, see e.g. [5].

*2nd proof.* Consider  $\mathcal{U}$  and  $\mathcal{U}'$  as above, and consider the map  $(\rho, d) : C^{p-1}(\mathcal{U}, F)/Z^{p-1}(\mathcal{U}, F) \rightarrow [C^{p-1}(\mathcal{U}', F)/Z^{p-1}(\mathcal{U}', F)] \oplus Z^p(\mathcal{U}, F)$   $(\rho, d)$  is clearly injective. I claim that its image is closed: In fact, since  $\bar{\rho} : H^p(\mathcal{U}, F) \rightarrow H^p(\mathcal{U}', F)$  is injective, this image consists of the pairs  $(\bar{a}', b)$ ,  $a' \in C^{p-1}(\mathcal{U}', F)$ ,  $b \in Z^p(\mathcal{U}, F)$  such that  $da' = \rho b$ , which proves the assertion.

Now we have  $(\rho, d) = (\rho, 0) + (0, d)$  and  $(\rho, 0)$  is compact. By a well-known lemma, it results that  $\text{Im}(0, d)$  is closed, which means that  $H^p(\mathcal{U}, F)$  is separated.

Finally, since  $\bar{\rho}$  is compact, and is an isomorphism, it follows that the identity map of  $H^p(\mathcal{U}, F)$  into itself is compact ; therefore this space is finite dimensional ; this proves the theorem.