

## 2. HOLOMORPHIC CORRESPONDENCES

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **14 (1968)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

*Proposition 5.* If  $f : X \xrightarrow{k} Y$  is continuous and  $Y$  is a Hausdorff space,  $G_f$  is closed in  $X \times Y$ .

*Definition 2.* A correspondence  $f$  is *proper* if  $f$  and  $f^{-1}$  are continuous.<sup>1</sup>

*Proposition 6.* If  $f : X \xrightarrow{k} Y$ ,  $f_1 : X_1 \xrightarrow{k} Y_1$ ,  $g : Y \xrightarrow{k} Z$  are proper, then  $f \times f_1$  and  $g \circ f$  are proper.

The junction of two proper correspondences need not, however, be proper. The diagonal mapping  $(I_X, I_X)$  serves as an example if  $X$  is not a Hausdorff space. If  $X$  is Hausdorff, the junction  $(f, f')$  of proper correspondences  $f : X \xrightarrow{k} Y$  and  $f' : X \xrightarrow{k} Y'$  remains proper.

*Proposition 7.* Let  $f : X \xrightarrow{k} Y$ ,  $f_1 : X \xrightarrow{k} Y_1$ ,  $g : Y \xrightarrow{k} Z$  be continuous where all the spaces are locally compact. Then we have:

- 1) If  $f$  is proper, then  $(f, f_1)$  and  $(f_1, f)$  are proper,
- 2) If  $g \circ f$  is proper and  $g^{-1}$  surjective, then  $f$  is proper,
- 3) If  $g \circ f$  is proper and  $f$  surjective, then  $g$  is proper.

## 2. HOLOMORPHIC CORRESPONDENCES

We consider reduced complex spaces  $(X, \theta)$  where  $X$  is assumed Hausdorff and where the structure sheaf  $\theta$  has no nilpotent elements. For the definition and related concepts we refer to [8]. The structure sheaf is usually omitted in the notation.

*Definition 3.* Let  $X$  and  $Y$  be complex spaces. A correspondence  $f : X \xrightarrow{k} Y$  is called *holomorphic* if

- 1)  $f$  is continuous,
- 2) the graph  $G_f$  is an analytic set in  $X \times Y$ .

If only the condition 2) is fulfilled,  $f$  is said to be *weakly holomorphic*.

Let  $f : X \xrightarrow{k} Y$  be weakly holomorphic. Then  $f^{-1}$  is weakly holomorphic; furthermore, if  $A \subset X$  is analytic in  $X$ ,  $f|_A$  is weakly holomorphic. Since  $\check{f}^{-1}(x) = G_f \cap (\{x\} \times Y)$ ,  $x \in X$ , is analytic in  $G_f$ ,  $f(x) = \hat{f}(\check{f}^{-1}(x))$

<sup>1</sup>) Compare [3] where another notion of proper correspondence is defined.

is analytic in  $Y$ . If  $f$  is holomorphic and  $A' \subset Y$  analytic in  $Y$ , then, since  $\hat{f}^{-1}(A')$  is analytic in  $G_f$  and  $\check{f}$  is proper,  $f^{-1}(A') = \check{f}(\hat{f}^{-1}(A'))$  is analytic in  $X$  by Remmert's mapping theorem [11] (see also [8], p. 129).

The correspondences  $f \times f_1$ ,  $(f, f'_1)$ , and  $g \circ f$  are holomorphic if the correspondences  $f, f_1, f'_1$ , and  $g$  are holomorphic.

A weakly holomorphic correspondence  $f: X \xrightarrow[k]{} Y$  is called *reducible* resp. *irreducible* if  $G_f$  is reducible resp. irreducible.  $G_f$  is always a union of irreducible components  $G^{(i)}$ ; let  $f_i: X \xrightarrow[k]{} Y$  be the (weakly holomorphic) correspondence whose graph is  $G^{(i)}$ . Then the correspondences  $f_i$  are called the irreducible components of  $f$  and we write  $f = \cup f_i$ .

### 3. MEROMORPHIC MAPPINGS

Let  $f: X \xrightarrow[k]{} Y$  be a correspondence where  $X$  is a topological space. A point  $x \in X$  is called a *distinguished point of  $f$*  if there is a neighborhood  $U$  of  $x$  such that the restriction  $f|_U$  is a mapping (in the usual sense).

*Definition 4.* A holomorphic correspondence  $f: X \xrightarrow[k]{} Y$  is called a *meromorphic mapping* if the following holds. If  $X$  is irreducible, then

- 1)  $f$  is irreducible,
- 2) There exists a distinguished point  $x_0 \in X$  of  $f$ .

In the general case, if  $X = \cup X^{(i)}$  is the decomposition of  $X$  into irreducible components, then there exist holomorphic correspondences  $f_i: X \xrightarrow[k]{} Y$

such that

- 1)  $f_i|_{X^{(i)}}$  is a meromorphic mapping and  $f_i|_{X - X^{(i)}}$  is empty,
- 2)  $f = \cup f_i$ .

A meromorphic mapping  $f$  is *bimeromorphic* if  $f^{-1}$  is meromorphic.

We use the notation  $f: X \xrightarrow[m]{} Y$  for a meromorphic mapping. Note that a meromorphic mapping is in general not a mapping in the strong sense.

An example of a meromorphic mapping is the correspondence  $f$  of  $\mathbf{C}^2$  onto the extended complex plane  $\mathbf{P}_1$  defined by  $f(z_1, z_2) = \frac{z_1}{z_2}$  if  $(z_1, z_2) \neq (0, 0)$ , and  $f(0, 0) = \mathbf{P}_1$ .