

# 5. Meromorphic forms

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **14 (1968)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

on  $A$ . Since  $f \in H^0(\mathbf{P}^n, F^m)$ , this gives the desired homogeneous polynomial.

To prove the theorem, it now suffices to consider all homogeneous polynomials which vanish on  $A$  without being identically zero and apply the Hilbert basis theorem.

### 5. MEROMORPHIC FORMS

Let  $X$  be a complex manifold. A holomorphic differential form is a form which in local coordinates can be written as a finite sum

$$\omega = \sum a_{i_1 \dots i_k} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_k} \quad (5.1)$$

with holomorphic coefficients  $a_{i_1 \dots i_k}$ .

A form is called meromorphic if it has locally the form (5.1) with coefficients that are meromorphic functions. Every meromorphic function can be written locally as  $f\omega$  where  $f$  is a meromorphic function and  $\omega$  a holomorphic form. The exterior differentiation  $d$ , satisfying  $d^2 = 0$ , extends naturally to meromorphic forms.

Let  $D$  be a divisor of  $X$  and let  $\Omega^p(k, D) = \Omega^p(X, k, D)$  be the sheaf of germs of meromorphic  $p$ -forms on  $X$  with poles only on  $D$  and of order  $\leq k$ , and let  $\Omega^p = \Omega^p(X)$  be the sheaf of germs of holomorphic  $p$ -forms on  $X$ .

*Lemma 5.1.* There is a natural isomorphism

$$\Omega^p(k, D) \simeq \Omega^p \otimes \underline{F^k}.$$

*Proof.* A germ in  $\Omega^p(k, D)$  at  $a \in X$  is represented by a form  $f\omega$ , where  $f$  is a meromorphic function in a neighbourhood  $U$  of  $a$ , with poles only on  $D$  and of order  $\leq k$ , and  $\omega$  is a holomorphic form on  $U$ . Now  $f$  corresponds biuniquely a section  $s \in \Gamma(U, F^k)$  (see Sect. 4), which gives a germ  $s_a \in \underline{F^k}_a$ . Also  $\omega$  defines a germ  $\omega_a \in \Omega^p_a$ .

The desired mapping  $\Omega^p(k, D) \rightarrow \Omega^p \otimes \underline{F^k}$  is now uniquely defined by

$$f\omega \rightarrow \omega_a \otimes s_a.$$

To see that it is an isomorphism, it is sufficient to observe that the inverse mapping of  $\Omega^p \otimes \underline{F^k}$  into  $\Omega^p(k, D)$  is induced by the bilinear mapping  $\Omega^p \oplus \underline{F^k} \rightarrow \Omega^p(k, D)$ , which is given by

$$(\omega_a, s_a) \rightarrow (f\omega)_a, \quad (a \in X).$$

where  $f$  is the meromorphic function determined by  $s_a$  by the procedure described just before Th. 4.1.

Now let  $X$  be a compact submanifold of  $\mathbf{P}^n$  and consider hyperplanes  $H_c$  in  $\mathbf{P}^n$ , given in homogeneous coordinates  $z_0, \dots, z_n$  by equations

$$\sum_0^n c_j z_j = 0 \text{ where } c = (c_0, \dots, c_n) \neq 0.$$

*Theorem 5.2.* There is an open dense set  $\Omega$  in  $\mathbf{C}^{n+1}$  such that if  $c = (c_0, \dots, c_n) \in \Omega$ , the hyperplane section  $D_c = H_c \cap X$  is a non-singular analytic subset of  $X$ .

The proof is omitted here.

Let  $D = H \cap X$  be a non-singular hyperplane section of  $X$ . To  $D$  is then associated a positive line bundle  $F$  on  $X$  (see Sect. 4). By Kodaira's vanishing theorem there is a  $k_0$  such that

$$H^q(X, \Omega^p \otimes \underline{F}^k) = 0, \quad (\forall q \geq 1, \forall k \geq k_0).$$

Using the isomorphism in Lemma 5.1, we have therefore proved.

*Lemma 5.3.* If  $D$  is a non-singular hyperplane section of a compact submanifold  $X$  of  $\mathbf{P}^n$ , then there exists  $k_0$  such that

$$H^q(X, \Omega^p(k, D)) = 0, \quad (\forall q \geq 1, \forall k \geq k_0).$$

## 6. THE ATIYAH-HODGE THEOREM

We first recall two well-known theorems.

Let  $X$  be a paracompact  $C^\infty$  manifold and let  $\mathcal{E}^p$  be the sheaf of germs of  $C^\infty$   $p$ -forms on  $X$  ( $p=0, 1, \dots$ ).

Then the sequence

$$0 \rightarrow \mathbf{C} \xrightarrow{i} \mathcal{E}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{E}^1 \xrightarrow{d} \mathcal{E}^2 \xrightarrow{d} \dots \quad (6.1)$$

is exact (Poincaré's lemma), and

$$H^q(X, \mathcal{E}^p) = 0, \quad (\forall q \geq 1, \forall p \geq 0), \quad (6.2)$$

because the  $\mathcal{E}^p$  are fine sheaves, i.e. they have partitions of unity. From (6.1) we get the sequence

$$0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{E}^0) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{E}^1) \rightarrow \dots,$$

which need not be exact. Put