UNE REMARQUE SUR (1+it)

UNE REMARQUE SUR $\zeta(1+it)$

par Raghavan NARASIMHAN

Le but de cette note est de donner une démonstration du fait que la fonction $\zeta(s)$ de Riemann ne s'annule pas sur la droite $\operatorname{Re} s = 1$. Cette démonstration est, en quelque sorte, plus naturelle que la démonstration habituelle basée sur l'inégalité $3 + 4 \cos \theta + \cos 2\theta \geqq 0$. Elle est une variante d'une démonstration due à A.E. Ingham. Pour être complet, on a ajouté des démonstrations de quelques résultats classiques.

Lemme 1. La fonction ζ, définie dans le demi-plan $\sigma = \operatorname{Re} s > 1$ par la série

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

possède un prolongement analytique au demi-plan $\operatorname{Re} s > -1$; elle est méromorphe dans ce dernier demi-plan, et sa seule singularité est un pôle simple au point $s = 1$.

Preuve. On pose

$$P(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqq x < 1\,,$$

et on étend P à toute la droite par périodicité: $P(x+n) = P(x)$ pour un entier n. On obtient, par sommation partielle,

$$\zeta(s) = s \int_1^{\infty} \frac{P'(x)}{x^{s+1}}\, dx + \frac{s}{s-1} - \frac{1}{2}, \qquad \operatorname{Re} s > 1$$

$$= s(s+1) \int_1^{\infty} \frac{P(x)}{x^{s+2}}\, dx + \frac{s}{s-1} - \frac{1}{2}.$$

Puisque P est bornée, l'intégrale converge uniformément dans tout demi-plan $\operatorname{Re} s \geqq -1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, ce qui démontre le lemme.

Lemme 2. (Landau) Soit f une fonction définie dans un demi-plan $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ par une série de Dirichlet

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}.$$

Supposons que $\operatorname{Re} a_n \geqq 0$ et que la série $\sum \dfrac{\operatorname{Re} a_n}{n^s}$ ne converge en aucun point $s = \sigma_0 - \delta$, $\delta > 0$. Alors f est singulière au point $s = \sigma_0$.

Preuve. Si f est régulière au point $s = \sigma_0$, et si $\sigma_1 > \sigma_0$, la série de Taylor

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(\sigma_1)}{m\,!} (s - \sigma_1)^m$$

converge dans l'intervalle $\sigma_0 - \delta < s < \sigma_1$, pour un certain $\delta > 0$.

En particulier, la série

$$\sum_{m=0}^{\infty} f \frac{(\sigma_1 - s)^m}{m\,!} (-1)^m \operatorname{Re} f^{(m)}(\sigma_1) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\sigma_1 - s)^m}{m\,!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\operatorname{Re} a_n)(\log n)^m}{n^{\sigma_1}}$$

converge pour $\sigma_0 - \delta < s < \sigma_1$. Puisqu'on a une série à termes positifs, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} a_n}{n^{\sigma_1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\sigma_1 - s)^m}{m\,!} (\log n)^m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} a_n}{n^{\sigma_1}} n^{\sigma_1 - s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} a_n}{n^s}$$

converge pour $\sigma_0 - \delta < s < \sigma_1$; contradiction.

Lemme 3. Si $f(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{a_n}{n^s}$ converge absolument dans le demi-plan $\operatorname{Re} s > 1$, alors la fonction $e^{f(s)} = F(s)$ est développable en série de Dirichlet $\sum_{1}^{\infty} \dfrac{b_n}{n^s}$ dans un demi-plan $\operatorname{Re} s > \sigma_0$. De plus, si $a_n \geqq 0$, on a $b_n \geqq a_n \geqq 0$.

Vérification directe.

Théorème. Pour $a \neq 0$, $\zeta(1+ia) \neq 0$.

Preuve. Supposons que, pour un $a \neq 0$, $\zeta(1+ia) = 0$. Alors $\zeta(s)$ étant réel pour s réel, $s > 1$, on a $\zeta(1-ia) = 0$. Soit

$$F(s) = \zeta^2(s)\,\zeta(s+ia)\,\zeta(s-ia)\,, \quad \operatorname{Re} s > -1.$$

F est holomorphe, dans le demi-plan $\operatorname{Re} s > -1$ en vertu du Lemme 1 et de l'hypothèse $\zeta(1+ia) = 0$. Du produit d'Euler de $\zeta(s)$, on déduit immédiatement que $F(s) = e^{f(s)}$, où

$$f(s) = \sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 + p^{ia} + p^{-ia}}{k\, p^{ks}} = 2 \sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + \cos(k\, a \log p)}{k\, p^{ks}};$$

ici p parcourt les nombres premiers. Les coefficients de cette série sont positifs. Des trois lemmes, on déduit que pour tout p, la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + \cos(k\, a \log p)}{k\, p^{ks}}$$

converge pour $-1 < s < \infty$. Puisque $kp^{ks} \to 0$ si $-1 < s < 0$, il s'en suit que $1 + \cos(k\, a \log p) \to 0$ quand $k \to \infty$. Mais ceci est impossible, parce que on aurait alors $1 + \cos(2k\, a \log p) = 2 \cos^2(k\, a \log p) \to + 2$ quand $k \to \infty$. Cette contradiction établit le théorème.

Remarque. Si on dispose des propriétés de ζ dans tout le plan, on voit immédiatement que $F(-2) = 0$, et que la série $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ converge au point $s = -2$ (même raisonnement qu'avant), ce qui impliquerait $a_n \equiv 0$. Mais $F \not\equiv 0$.

Cette démonstration se généralise, par exemple, à la fonction ζ d'un corps de nombres algébriques.

Institut mathématique
Université de Genève

(Reçu le 15 mars 1969)