

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 14 (1968)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE REMARQUE SUR $(1+it)$
Autor: Narasimhan, Raghavan
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-42348>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 30.01.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

UNE REMARQUE SUR $\zeta(1+it)$

par Raghavan NARASIMHAN

Le but de cette note est de donner une démonstration du fait que la fonction $\zeta(s)$ de Riemann ne s'annule pas sur la droite $\operatorname{Re} s = 1$. Cette démonstration est, en quelque sorte, plus naturelle que la démonstration habituelle basée sur l'inégalité $3 + 4 \cos \theta + \cos 2\theta \geq 0$. Elle est une variante d'une démonstration due à A.E. Ingham. Pour être complet, on a ajouté des démonstrations de quelques résultats classiques.

Lemme 1. La fonction ζ , définie dans le demi-plan $\sigma = \operatorname{Re} s > 1$ par la série

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

possède un prolongement analytique au demi-plan $\operatorname{Re} s > -1$; elle est méromorphe dans ce dernier demi-plan, et sa seule singularité est un pôle simple au point $s = 1$.

Preuve. On pose

$$P(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \quad \text{pour } 0 \leq x < 1,$$

et on étend P à toute la droite par périodicité: $P(x+n) = P(x)$ pour un entier n . On obtient, par sommation partielle,

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= s \int_1^{\infty} \frac{P'(x)}{x^{s+1}} dx + \frac{s}{s-1} - \frac{1}{2}, \quad \operatorname{Re} s > 1 \\ &= s(s+1) \int_1^{\infty} \frac{P(x)}{x^{s+2}} dx + \frac{s}{s-1} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Puisque P est bornée, l'intégrale converge uniformément dans tout demi-plan $\operatorname{Re} s \geq -1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, ce qui démontre le lemme.

Lemme 2. (Landau) Soit f une fonction définie dans un demi-plan $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ par une série de Dirichlet

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}.$$

Supposons que $\operatorname{Re} a_n \geq 0$ et que la série $\sum \frac{\operatorname{Re} a_n}{n^s}$ ne converge en aucun point $s = \sigma_0 - \delta$, $\delta > 0$. Alors f est singulière au point $s = \sigma_0$.

Preuve. Si f est régulière au point $s = \sigma_0$, et si $\sigma_1 > \sigma_0$, la série de Taylor

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(\sigma_1)}{m!} (s - \sigma_1)^m$$

converge dans l'intervalle $\sigma_0 - \delta < s < \sigma_1$, pour un certain $\delta > 0$.

En particulier, la série

$$\sum_{m=0}^{\infty} f \frac{(\sigma_1 - s)^m}{m!} (-1)^m \operatorname{Re} f^{(m)}(\sigma_1) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\sigma_1 - s)^m}{m!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\operatorname{Re} a_n) (\log n)^m}{n^{\sigma_1}}$$

converge pour $\sigma_0 - \delta < s < \sigma_1$. Puisqu'on a une série à termes positifs, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} a_n}{n^{\sigma_1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\sigma_1 - s)^m}{m!} (\log n)^m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} a_n}{n^{\sigma_1}} n^{\sigma_1 - s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} a_n}{n^s}$$

converge pour $\sigma_0 - \delta < s < \sigma_1$; contradiction.

Lemme 3. Si $f(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ converge absolument dans le demi-plan $\operatorname{Re} s > 1$, alors la fonction $e^{f(s)} = F(s)$ est développable en série de Dirichlet $\sum_1^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$ dans un demi-plan $\operatorname{Re} s > \sigma_0$. De plus, si $a_n \geq 0$, on a $b_n \geq a_n \geq 0$.

Vérification directe.

Théorème. Pour $a \neq 0$, $\zeta(1+ia) \neq 0$.

Preuve. Supposons que, pour un $a \neq 0$, $\zeta(1+ia) = 0$. Alors $\zeta(s)$ étant réel pour s réel, $s > 1$, on a $\zeta(1-ia) = 0$. Soit

$$F(s) = \zeta^2(s) \zeta(s+ia) \zeta(s-ia), \operatorname{Re} s > -1.$$

F est holomorphe, dans le demi-plan $\operatorname{Re} s > -1$ en vertu du Lemme 1 et de l'hypothèse $\zeta(1+ia) = 0$. Du produit d'Euler de $\zeta(s)$, on déduit immédiatement que $F(s) = e^{f(s)}$, où

$$f(s) = \sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 + p^{ia} + p^{-ia}}{k p^{ks}} = 2 \sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + \cos(k a \log p)}{k p^{ks}};$$

ici p parcourt les nombres premiers. Les coefficients de cette série sont positifs. Des trois lemmes, on déduit que pour tout p , la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + \cos(k a \log p)}{k p^{ks}}$$

converge pour $-1 < s < \infty$. Puisque $k p^{ks} \rightarrow 0$ si $-1 < s < 0$, il s'en suit que $1 + \cos(k a \log p) \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$. Mais ceci est impossible, parce que on aurait alors $1 + \cos(2k a \log p) = 2 \cos^2(k a \log p) \rightarrow +2$ quand $k \rightarrow \infty$. Cette contradiction établit le théorème.

Remarque. Si on dispose des propriétés de ζ dans tout le plan, on voit immédiatement que $F(-2) = 0$, et que la série $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ converge au point $s = -2$ (même raisonnement qu'avant), ce qui impliquerait $a_n \equiv 0$. Mais $F \not\equiv 0$.

Cette démonstration se généralise, par exemple, à la fonction ζ d'un corps de nombres algébriques.