Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 14 (1968)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: L'HYPOTHÈSE DE FERMAT POUR LES EXPOSANTS NÉGATIFS

Autor: Thérond, Jean-Daniel

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-42350

L'HYPOTHÈSE DE FERMAT POUR LES EXPOSANTS NÉGATIFS

par Jean-Daniel THÉROND

Cette note modifie celle parue sous le même titre dans le tome XIII, fascicule 4 (1967) de cette revue, pp. 247-252.

A la page 247, avant-dernière ligne, c'est « ne soit pas divisible » qu'il faut lire, et les solutions données dans les théorèmes 2 (p. 248) et 4 (p. 249) ne sont pas complètes. Pour le premier, il faut le remplacer par:

THÉORÈME 2. *Les racines primitives de l'équation diophantienne* $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ *sont*

$$x = p\,(p+q)\,, \qquad y = q\,(p+q)\,, \qquad z = pq$$

où p et q sont des entiers non nuls premiers entre eux.

Démonstration: Soit $t = (x, y)$, alors $x = tp$ et $y = tq$ avec $(p, q) = 1$ et l'équation

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{tp} + \frac{1}{tq} = \frac{1}{z} \text{ implique } z = \frac{tpq}{p+q}\,.$$

Or $(p, q) = 1$ donc $(p+q, pq) = 1$; ainsi, puisque $z \in Z^*$, $t = m\,(p+q)$ d'où $x = mp\,(p+q)$, $y = mq\,(p+q)$ et $z = mpq$. En divisant par m on obtient alors les racines primitives annoncées.

Le théorème 3 (p. 249) peut être remplacé par la formulation équivalente:

THÉORÈME 3. *Les racines primitives non triviales de l'équation diophantienne* $x^2 + y^2 = z^2$ *sont*

$$x = 2ab \qquad y = a^2 - b^2 \qquad z = a^2 + b^2$$

où a et b sont des entiers différents premiers entre eux.

Quant au théorème 4, il doit être modifié ainsi:

THÉORÈME 4. *Les racines primitives de l'équation diophantienne*

$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{z^2}$ *sont*

$$x = 2ab(a^2 + b^2) \qquad y = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) \qquad z = 2ab(a^2 - b^2)$$

où a et b sont des entiers non nuls, différents, premiers entre eux.

Démonstration : Soit $t = (x, y)$ d'où $x = tx_1$ et $y = ty_1$ où $(x_1, y_1) = 1$. L'équation

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{t^2 x_1^2} + \frac{1}{t^2 y_1^2} = \frac{1}{z^2} \text{ implique } z^2 = \frac{t^2 x^2 y^2}{x_1^2 + y_1^2}$$

Or $(x_1, y_1) = 1$ d'où $(x_1^2 + y_1^2, x_1^2 y_1^2) = 1$; ainsi $t^2 = l\,(x_1^2 + y_1^2)$ et $z^2 = l x_1^2 y_1^2$ d'où $l = m^2$ et $t^2 = m^2\,(x_1^2 + y_1^2)$. Ainsi $x_1^2 + y_1^2$ est un carré, ce qui donne, d'après le théorème 3, $x_1 = 2ab$, $y_1 = a^2 - b^2$ et $t^2 = m^2\,(x_1^2 + y_1^2) = m^2\,(a^2 + b^2)^2$ d'où $t = m\,(a^2 + b^2)$. On obtient alors $x = tx_1 = m \,.\, 2ab\,(a^2 + b^2)$, $y = ty_1 = m\,(a^2 - b^2)\,(a^2 + b^2)$, $z = mx_1 y_1$ c'est à dire $z = m2ab\,(a^2 - b^2)$ d'où le résultat annoncé en divisant par m pour que les racines soient primitives.

(Reçu le 30 avril 1969)

Institut de Mathématiques
Université de Montpellier