

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 14 (1968)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SOMMES DE PUISSANCES  $m$  iemes DANS LES ANNEAUX  $\beta$ -  
ADRIQUES ET LES ANNEAUX D'ENTRIERS ALGÈBRIQUES  
**Autor:** Joly, Jean-René  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-42351>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 30.01.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

SOMMES DE PUISSANCES  $m^{\text{ièmes}}$   
DANS LES ANNEAUX  $\mathfrak{P}$ -ADIQUES  
ET LES ANNEAUX D'ENTIERS ALGÈBRIQUES

Jean-René JOLY

1. INTRODUCTION

Pour tout anneau commutatif et unitaire  $A$  et tout entier positif  $m$ , nous désignerons par  $A_m^+$  l'ensemble des éléments de  $A$  de la forme

$$a_1^m + a_2^m + \dots + a_s^m$$

( $s$  positif quelconque,  $a_1, a_2, \dots, a_s \in A$ ), et par  $A_m$  l'ensemble des éléments de  $A$  de la forme

$$\pm a_1^m \pm a_2^m \pm \dots \pm a_s^m$$

(avec également  $s$  positif quelconque et  $a_1, a_2, \dots, a_s \in A$ ); il est clair que  $A_m$  est le sous-anneau de  $A$  engendré par les puissances  $m^{\text{ièmes}}$  des éléments de  $A$ . Nous désignerons d'autre part par  $w(m; A)$  le plus petit entier  $s$  tel que tout élément de  $A_m^+$  puisse se mettre sous la forme (1), et par  $v(m; A)$  le plus petit entier  $s$  tel que tout élément de  $A_m$  puisse se mettre sous la forme (2) (bien entendu, il n'est pas exclu a priori que  $w(m; A)$  ou  $v(m; A)$  soit infini; voir par exemple dans [8], th. (7.30), la construction d'un corps  $L$  tel que  $w(m; L)$  soit infini pour tout exposant pair  $m$ ).

\*

L'étude par des méthodes purement *algébriques* des constantes  $w(m; A)$  et  $v(m; A)$ , et la recherche de conditions permettant d'affirmer que  $A = A_m$ , ont été entreprises notamment par Birch, Ramanujam et nous-même (voir respectivement [3], [9], [7]) dans le cas où  $A$  est un *anneau  $\mathfrak{P}$ -adique*, et par Siegel, Bateman, Stemmler, Bhaskaran et nous-même dans le cas où  $A$  est un *anneau d'entiers algébriques* (voir respectivement [10], [1], [11], [2], [6]). Naturellement, l'étude de  $w(m; A)$  lorsque  $A$  est un anneau d'entiers algébriques (ou un corps de nombres algébriques) est étroitement apparentée au problème de Waring, qui a fait depuis une cinquantaine

d'années l'objet de travaux fort nombreux; mais ces travaux reposent presque exclusivement sur l'application de techniques *analytiques* (en fait, diverses généralisations et améliorations des méthodes de Hardy et Littlewood) et, faute de compétence suffisante en ce domaine, nous nous abstenons de les envisager ici.

\*

En fait, le but de ce court article est de résumer les résultats actuellement connus (connus de l'auteur, bien entendu) relatifs à  $w(m; A)$ ,  $v(m; A)$  et  $A_m$  dans le cas où  $A$  est un anneau  $\mathfrak{B}$ -adique (paragraphe 2) et dans le cas où  $A$  est un anneau d'entiers algébriques (paragraphe 3), puis de les compléter en donnant de  $v(m; A)$  une majoration explicite et indépendante de  $A$ , toujours dans le cas où  $A$  est un anneau d'entiers algébriques (théorème (3.3), démontré au paragraphe 4); ce dernier résultat est une conséquence presque immédiate d'un résultat de Ramanujam (th. (2.3)) dont la démonstration, donnée dans [9], est d'ailleurs longue et délicate.

## 2. SOMMES DE PUISSANCES $m^{\text{ièmes}}$ DANS UN ANNEAU $\mathfrak{B}$ -ADIQUE

Pour des raisons de commodité, adoptons une notation: si  $p$  est un nombre premier, si  $q = p^f$  ( $f \geq 1$ ) est un nombre  $p$ -primaire et si  $m$  est un entier positif quelconque, nous désignerons par le symbole  $[q; m]$  le plus petit nombre  $p$ -primaire  $p^g$  ayant les deux propriétés suivantes:

l'exposant  $g$  divise l'exposant  $f$ ;  
le quotient  $(p^f - 1)/(p^g - 1)$  divise l'entier  $m$ .

On a alors ce résultat élémentaire (pour une démonstration, voir par exemple [8], th. 2.3)):

*Lemme (2.1).* Soit  $k = \mathbb{F}_q$  le corps fini à  $q = p^f$  éléments. Si  $m$  est un entier positif,  $k_m$  est égal au sous-corps de  $k$  contenant exactement  $[q; m]$  éléments:

$$k_m = \mathbb{F}_{[q; m]}.$$

\*

Ces préliminaires étant posés, désignons par  $A$  un anneau  $\mathfrak{B}$ -adique (c'est-à-dire un anneau de valuation discrète complet d'inégales caracté-

ristiques à corps résiduel fini), et soient  $k$  le corps résiduel de  $A$ ,  $q = p^f$  le nombre d'éléments de  $k$  et  $e$  l'indice de ramification absolu de  $A$ .

*Théorème (2.2)* (voir [8], th. (2.19)). Les deux assertions suivantes sont équivalentes:

- (a)  $A = A_m$ ;
- (b)  $k = k_m$ , et de plus, si  $p$  divise  $m$ ,  $A$  est absolument non-ramifié.

Compte tenu du lemme (2.1), l'égalité  $A = A_m$  équivaut donc à la condition « numérique » ci-dessous:

- (c)  $[q; m] = q$ , et de plus, si  $p$  divise  $m$ ,  $e = 1$ .

Ajoutons deux choses: tout d'abord, dans un anneau  $\mathfrak{B}$ -adique,  $-1$  est toujours somme de puissances  $m^{iemes}$  (voir par exemple [8], th. (6.19)): l'égalité  $A = A_m$  implique donc en fait que tout élément de  $A$  est somme de puissances  $m^{iemes}$ ; par ailleurs, même lorsque  $A \neq A_m$ ,  $A_m$  est un anneau local, séparé, complet, de dimension 1 (mais non intégralement clos), et  $A$  est un  $A_m$ -module de type fini (voir [8], prop. (3.14)).

\*

*Théorème (2.3)* (voir [9], prop. 3). On a la majoration suivante, indépendante de l'anneau ( $\mathfrak{B}$ -adique)  $A$ :

$$w(m; A) \leq 8m^5.$$

Signalons que Birch a donné, par une méthode complètement différente, la majoration (également indépendante de  $A$ )  $w(m; A) \leq m^{16m^2}$ ; par ailleurs, nous avons prouvé nous-même que si  $m$  est *premier impair*, on a la majoration plus précise  $w(m; A) \leq 2m - 1$  (voir respectivement [3], th. 1, et [8], th. (7.34)).

### 3. SOMMES DE PUISSANCES $m^{iemes}$ DANS UN ANNEAU D'ENTIERS ALGÈBRIQUES

Soient maintenant  $A$  un anneau d'entiers algébriques,  $K$  le corps des fractions de  $A$ , et  $d$  le discriminant de  $K$ ; pour tout idéal premier non nul  $\mathfrak{p}$  de  $A$ , convenons de désigner par  $c_p$  la caractéristique de  $A/\mathfrak{p} = A_p/\mathfrak{p}A_p$ , par  $e_p$  et  $f_p$  l'indice de ramification absolu et le degré résiduel absolu de  $A_p$ , et par  $N_p$  le nombre d'éléments de  $A/\mathfrak{p} = A_p/\mathfrak{p}A_p$ ; on a donc  $N_p = c_p^{f_p}$ .

*Théorème (3.1)* (voir [2], th. 1, d'une part, et [6], th. 5 ou [8], th. (4.11), d'autre part). Les deux assertions suivantes sont équivalentes:

(a)  $A = A_m$ ;

(b) Pour tout idéal premier non nul  $\mathfrak{p}$  de  $A$ , on a  $A/\mathfrak{p} = (A/\mathfrak{p})_m$ , et de plus, si  $c_{\mathfrak{p}}$  divise  $m$ , on a  $e_{\mathfrak{p}} = 1$ .

Notons que, compte tenu du lemme (2.1) et du lien entre discriminant et ramification, l'égalité  $A = A_m$  équivaut ici encore à une condition « numérique »:

(c) Pour tout idéal premier non nul  $\mathfrak{p}$  de  $A$ , on a l'égalité  $[N\mathfrak{p}; m] = N\mathfrak{p}$ , et de plus,  $m$  est étranger au discriminant  $d$ .

(La condition  $[N\mathfrak{p}; m] = N\mathfrak{p}$  est d'ailleurs automatiquement vérifiée dès que  $c_{\mathfrak{p}} > m$ ; il n'y a donc en fait qu'un nombre fini de vérifications numériques à effectuer pour voir si un couple  $(A, m)$  satisfait à la condition (c)).

Le théorème (3.1) a été démontré pour la première fois par Siegel pour  $m = 2$  (voir [10], th. V) et par Bateman et Stemmler pour  $m$  premier quelconque (voir [1], th. 3). En ce qui concerne le cas général, la démonstration donnée dans [2] par Bhaskaran est de type *arithmétique* en ce sens qu'elle s'appuie sur des calculs de congruences modulo des puissances d'idéaux premiers; elle utilise d'ailleurs certains des résultats obtenus par Bateman et Stemmler dans [1] et [11]; la démonstration du théorème (3.1) que nous donnons nous-même dans [6] est au contraire de type *algébrique*: elle consiste à noter que  $A = A_m$  si et seulement si  $A_{\mathfrak{p}} = (A_{\mathfrak{p}})_m$  pour tout idéal premier  $\mathfrak{p}$  non nul de  $A$ , puis que  $A_{\mathfrak{p}} = (A_{\mathfrak{p}})_m$  si et seulement si  $\hat{A}_{\mathfrak{p}} = (\hat{A}_{\mathfrak{p}})_m$ ; comme  $\hat{A}_{\mathfrak{p}}$  est un anneau  $\mathfrak{B}$ -adique, il suffit alors d'utiliser le théorème (2.2). Naturellement, les deux démonstrations sont essentiellement équivalentes; remarquons simplement que les techniques de l'Algèbre Commutative (localisation, complétion, ...) sont particulièrement bien adaptées au type de problème envisagé ici; nous aurons d'ailleurs une nouvelle occasion de le constater au paragraphe suivant.

\*

*Théorème (3.2)* (voir [2], th. 1). Pour tout entier positif  $m$ , il existe un entier  $b(m)$  tel qu'on ait la majoration

$$v(m; A) \leq b(m)$$

pour tout anneau d'entiers algébriques  $A$ .

Ce théorème est tout à fait analogue au théorème (2.3), à ceci près qu'il ne nous donne pas d'ordre de grandeur pour la quantité majorante. Nous allons combler cette lacune en démontrant le résultat suivant:

*Théorème (3.3).* Quels que soient l'entier positif  $m$  et l'anneau d'entiers algébriques  $A$ , on a l'inégalité

$$v(m; A) \leq 2^m + 8m^5.$$

Le théorème (3.3) généralise l'inégalité

$$v(m; A) \leq 2^{m-1} + (m-1)/3 + 1$$

obtenue par Stemmler (voir [11]) dans le cas où l'exposant  $m$  est *premier*; l'ordre de grandeur est seulement un peu moins bon:  $2^m$  au lieu de  $2^{m-1}$  (ceci tient au fait qu'on est obligé, dans le cas général, d'envisager les valeurs *paires* de  $m$ ).

#### 4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME (3.3).

*Lemme (4.1).* Soient  $A$  un anneau,  $m$  un entier positif. et  $B$  un anneau quotient de  $A$ . On a alors l'inégalité

$$v(m; B) \leq v(m; A).$$

*Lemme (4.2.)* Soient  $A_1, A_2, \dots, A_r$  des anneaux en nombre fini, et soit  $B$  leur produit. On a alors l'inégalité

$$w(m; B) \leq \sup_{1 \leq i \leq r} w(m; A_i).$$

La démonstration de ces deux lemmes est immédiate; signalons seulement que le lemme (4.2) devient faux si on y remplace  $w$  par  $v$  (comme on le voit sur l'exemple suivant:  $r = 2$ ,  $m = 2$ , et  $A_1 = A_2 = \mathbf{R}$ ).

*Lemme (4.3.)* Soient  $A$  un anneau,  $m$  et  $s$  deux entiers positifs et  $\alpha$  un idéal de  $A$  ayant la propriété suivante:

tout élément de  $\alpha$  est de la forme

$$(4) \quad \pm a_1^m \pm a_2^m \pm \dots \pm a_s^m \quad (a_1, a_2, \dots, a_s \in A);$$

on a alors l'inégalité

$$v(m; A) \leq s + v(m; A/\alpha).$$

Il suffit pour le voir d'appliquer la définition de  $v(m; A)$ .

*Lemme (4.4).* Soient  $A$  un anneau d'entiers algébriques,  $m$  et  $n$  deux entiers positifs et  $\mathfrak{p}$  un idéal premier non nul de  $A$ . on a alors l'inégalité

$$w(m; A/\mathfrak{p}^n) \leq 8m^5.$$

Prouvons ce lemme:  $\mathfrak{p}$  étant en fait un idéal maximal de  $A$ , on a un isomorphisme canonique

$$A/\mathfrak{p}^n \simeq A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^n A_{\mathfrak{p}}$$

(voir [4], chap. II, § 3, n° 3, prop. 9); mais on a également un isomorphisme canonique

$$A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^n A_{\mathfrak{p}} \simeq \widehat{A}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^n \widehat{A}_{\mathfrak{p}}$$

(voir [4], chap. III, § 2, n° 12, formules (21), et n° 13, prop. 19).  $A/\mathfrak{p}^n$  est donc isomorphe à un quotient de  $\widehat{A}_{\mathfrak{p}}$ , d'où, en appliquant le lemme (4.1),

$$w(m; A/\mathfrak{p}^n) \leq w(m; \widehat{A}_{\mathfrak{p}});$$

le lemme (4.4) résulte alors du théorème (2.3), et du fait que  $\widehat{A}_{\mathfrak{p}}$  est un anneau  $\mathfrak{B}$ -adique.

\*

Venons-en alors à la démonstration du théorème (3.3). Soient  $A$  un anneau d'entiers algébriques et  $m$  un entier positif; l'identité bien connue (voir par exemple [5], th. 402)

$$(5) \quad m! a = \sum_{h=0}^{m-1} \binom{m-1}{h} (-1)^{m-1-h} ((a+h)^m - h^m)$$

montre que tout élément de l'idéal  $\mathfrak{a} = m!A$  est de la forme (4) (voir lemme (4.3)) avec

$$s = 2 \sum_{h=0}^{m-1} \binom{m-1}{h} = 2 \cdot 2^{m-1} = 2^m;$$

le lemme (4.3) donne donc l'inégalité

$$v(m; A) \leq 2^m + v(m; A/\mathfrak{a}).$$

D'autre part, dans  $A/\mathfrak{a}$ , qui est un anneau fini,  $-1$  est somme de puissances  $m^{\text{ièmes}}$ , d'où évidemment l'inégalité

$$v(m; A/\mathfrak{a}) \leq w(m; A/\mathfrak{a}).$$

Il suffit donc en fait de prouver l'inégalité

$$(6) \quad w(m; A/\alpha) \leq 8m^5;$$

or, dans  $A$ , qui est un anneau de Dedekind, l'idéal  $\alpha$  se décompose en facteurs premiers:

$$\alpha = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_r^{n_r}$$

(les  $p_i$  premiers non nuls et deux à deux distincts, les  $n_i > 0$ ), et le « théorème chinois » (voir par exemple [4], chap. II, § 1, n° 2, prop. 5) donne un isomorphisme canonique

$$A/\alpha \simeq (A/p_1^{n_1}) \times (A/p_2^{n_2}) \times \dots \times (A/p_r^{n_r});$$

l'inégalité (6) résulte alors immédiatement des lemmes (4.2) et (4.4). Et le théorème (3.3) se trouve démontré.

\*

Deux remarques pour terminer:

a) Tout d'abord, si l'exposant  $m$  est *impair*, on peut, au lieu de (5), utiliser l'identité

$$m!(a + (m-1)/2) = \sum_{h=0}^{m-1} \binom{m-1}{h} (-1)^{m-1-h} (a+h)^m,$$

qui n'en est d'ailleurs qu'une écriture différente; la démonstration ci-dessus mène alors à la majoration plus précise

$$v(m; A) \leq 2^{m-1} + 8m^5.$$

b) Si maintenant l'exposant  $m$  est *premier impair*, l'inégalité (6) peut être remplacée par celle-ci:

$$(8) \quad w(m; A/\alpha) \leq 2m-1;$$

il suffit pour le voir d'appliquer le résultat signalé dans les dernières lignes du paragraphe 2. Remplaçant dans la démonstration ci-dessus l'identité (5) par l'identité (7) et la majoration (6) par la majoration (8), on obtient alors l'inégalité

$$v(m; A) \leq 2^{m-1} + 2m-1,$$

toujours pour un anneau d'entiers algébriques  $A$ , bien entendu.

\*



BIBLIOGRAPHIE

- [1] BATEMAN, P. T. & R. M. STEMMLER, Waring's problem for algebraic number fields, *Illinois Math. Journal*, **6** (1962), p. 142-156.
- [2] BHASKARAN, M. Sums of  $m$ -th powers of algebraic integers, *Archiv der Math.*, **17** (1966), p. 497-504.
- [3] BIRCH, B. J. Waring's problem for  $P$ -adic number fields, *Acta Arithmetica*, **9** (1964), p. 169-176.
- [4] BOURBAKI, N. *Algèbre Commutative*, Hermann, Paris.
- [5] HARDY, G. H. & E. M. WRIGHT, *The Theory of Numbers*, Clarendon Press, Oxford.
- [6] JOLY, J. R. Sur les puissances des éléments d'un anneau commutatif, *C. R. Acad. Sc. Paris*, **261** (1965), p. 3259-3262.
- [7] JOLY, J. R. Problème de Waring pour un exposant premier dans certains anneaux locaux, *C. R. Acad. Sc. Paris*, **262** (1966), p. 1438-1441.
- [8] JOLY, J. R. *Etude des sommes de puissances dans les anneaux commutatifs*, Thèse (1968), Faculté des Sciences d'Orsay.
- [9] RAMANUJAM, C. P. Sums of  $m$ -th powers in  $P$ -adic rings, *Mathematika*, **10** (1963), p. 137-146.
- [10] SIEGEL, C. L. Sums of  $m$ -th powers of algebraic integers, *Annals of Math.*, **46** (1945), p. 313-339.
- [11] STEMMLER, R. M. The easier Waring problem in algebraic number fields, *Acta Arithmetica*, **6** (1961). p. 447-468.

Faculté des Sciences de Grenoble,  
Institut de Mathématiques Pures,  
38-Saint-Martin d'Hères.

( Reçu le 20 mai 1969 )