1. Introduction

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **14 (1968)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

SOMMES DE PUISSANCES m^{iemes} DANS LES ANNEAUX $\mathfrak{P}$-ADIQUES ET LES ANNEAUX D'ENTIERS ALGÉBRIQUES

Jean-René JOLY

1. INTRODUCTION

Pour tout anneau commutatif et unitaire A et tout entier positif m, nous désignerons par A_m^+ l'ensemble des éléments de A de la forme

$$a_1{}^m + a_2{}^m + \dots + a_s{}^m$$

(s positif quelconque, $a_1, a_2, \dots, a_s \in A$), et par A_m l'ensemble des éléments de A de la forme

$$\pm a_1{}^m \pm a_2{}^m \pm \dots \pm a_s{}^m$$

(avec également s positif quelconque et $a_1, a_2, \dots, a_s \in A$); il est clair que A_m est le sous-anneau de A engendré par les puissances m^{iemes} des éléments de A. Nous désignerons d'autre part par $w(m; A)$ le plus petit entier s tel que tout élément de A_m^+ puisse se mettre sous la forme (1), et par $v(m; A)$ le plus petit entier s tel que tout élément de A_m puisse se mettre sous la forme (2) (bien entendu, il n'est pas exclu a priori que $w(m; A)$ ou $v(m; A)$ soit infini; voir par exemple dans [8], th. (7.30), la construction d'un corps L tel que $w(m; L)$ soit infini pour tout exposant pair m).

*

L'étude par des méthodes purement *algébriques* des constantes $w(m; A)$ et $v(m; A)$, et la recherche de conditions permettant d'affirmer que $A = A_m$, ont été entreprises notamment par Birch, Ramanujam et nous-même (voir respectivement [3], [9], [7]) dans le cas où A est un *anneau* $\mathfrak{P}$*-adique*, et par Siegel, Bateman, Stemmler, Bhaskaran et nous-même dans le cas où A est un *anneau d'entiers algébriques* (voir respectivement [10], [1], [11], [2], [6]). Naturellement, l'étude de $w(m; A)$ lorsque A est un anneau d'entiers algébriques (ou un corps de nombres algébriques) est étroitement apparentée au problème de Waring, qui a fait depuis une cinquantaine d'années l'objet de travaux fort nombreux; mais ces travaux reposent presque exclusivement sur l'application de techniques *analytiques* (en fait, diverses généralisations et améliorations des méthodes de Hardy et Littlewood) et, faute de compétence suffisante en ce domaine, nous nous abstiendrons de les envisager ici.

*

En fait, le but de ce court article est de résumer les résultats actuellement connus (connus de l'auteur, bien entendu) relatifs à $w(m; A)$, $v(m; A)$ et A_m dans le cas où A est un anneau $\mathfrak{P}$-adique (paragraphe 2) et dans le cas où A est un anneau d'entiers algébriques (paragraphe 3), puis de les compléter en donnant de $v(m; A)$ une majoration explicite et indépendante de A, toujours dans le cas où A est un anneau d'entiers algébriques (théorème (3.3), démontré au paragraphe 4); ce dernier résultat est une conséquence presque immédiate d'un résultat de Ramanujam (th. (2.3)) dont la démonstration, donnée dans [9], est d'ailleurs longue et délicate.

2. Sommes de puissances m^{iemes} dans un anneau $\mathfrak{P}$-adique

Pour des raisons de commodité, adoptons une notation: si p est un nombre premier, si $q = p^f$ $(f \geqq 1)$ est un nombre p-primaire et si m est un entier positif quelconque, nous désignerons par le symbole $[q; m]$ le plus petit nombre p-primaire p^g ayant les deux propriétés suivantes:

l'exposant g divise l'exposant f;
le quotient $(p^f - 1)/(p^g - 1)$ divise l'entier m.

On a alors ce résultat élémentaire (pour une démonstration, voir par exemple [8], th. 2.3)):

Lemme (2.1). Soit $k = \mathbf{F}_q$ le corps fini à $q = p^f$ éléments. Si m est un entier positif, k_m est égal au sous-corps de k contenant exactement $[q; m]$ éléments:

$$k_m = \mathbf{F}_{[q;\, m]} \, .$$

*

Ces préliminaires étant posés, désignons par A un anneau $\mathfrak{P}$-adique (c'est-à-dire un anneau de valuation discrète complet d'inégales caracté-