

# 1. Introduction

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **14 (1968)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SOMMES DE PUISSANCES  $m^{\text{ièmes}}$   
DANS LES ANNEAUX  $\mathfrak{P}$ -ADIQUES  
ET LES ANNEAUX D'ENTIERS ALGÈBRIQUES

Jean-René JOLY

1. INTRODUCTION

Pour tout anneau commutatif et unitaire  $A$  et tout entier positif  $m$ , nous désignerons par  $A_m^+$  l'ensemble des éléments de  $A$  de la forme

$$a_1^m + a_2^m + \dots + a_s^m$$

( $s$  positif quelconque,  $a_1, a_2, \dots, a_s \in A$ ), et par  $A_m$  l'ensemble des éléments de  $A$  de la forme

$$\pm a_1^m \pm a_2^m \pm \dots \pm a_s^m$$

(avec également  $s$  positif quelconque et  $a_1, a_2, \dots, a_s \in A$ ); il est clair que  $A_m$  est le sous-anneau de  $A$  engendré par les puissances  $m^{\text{ièmes}}$  des éléments de  $A$ . Nous désignerons d'autre part par  $w(m; A)$  le plus petit entier  $s$  tel que tout élément de  $A_m^+$  puisse se mettre sous la forme (1), et par  $v(m; A)$  le plus petit entier  $s$  tel que tout élément de  $A_m$  puisse se mettre sous la forme (2) (bien entendu, il n'est pas exclu a priori que  $w(m; A)$  ou  $v(m; A)$  soit infini; voir par exemple dans [8], th. (7.30), la construction d'un corps  $L$  tel que  $w(m; L)$  soit infini pour tout exposant pair  $m$ ).

\*

L'étude par des méthodes purement *algébriques* des constantes  $w(m; A)$  et  $v(m; A)$ , et la recherche de conditions permettant d'affirmer que  $A = A_m$ , ont été entreprises notamment par Birch, Ramanujam et nous-même (voir respectivement [3], [9], [7]) dans le cas où  $A$  est un *anneau  $\mathfrak{P}$ -adique*, et par Siegel, Bateman, Stemmler, Bhaskaran et nous-même dans le cas où  $A$  est un *anneau d'entiers algébriques* (voir respectivement [10], [1], [11], [2], [6]). Naturellement, l'étude de  $w(m; A)$  lorsque  $A$  est un anneau d'entiers algébriques (ou un corps de nombres algébriques) est étroitement apparentée au problème de Waring, qui a fait depuis une cinquantaine

d'années l'objet de travaux fort nombreux; mais ces travaux reposent presque exclusivement sur l'application de techniques *analytiques* (en fait, diverses généralisations et améliorations des méthodes de Hardy et Littlewood) et, faute de compétence suffisante en ce domaine, nous nous abstenons de les envisager ici.

\*

En fait, le but de ce court article est de résumer les résultats actuellement connus (connus de l'auteur, bien entendu) relatifs à  $w(m; A)$ ,  $v(m; A)$  et  $A_m$  dans le cas où  $A$  est un anneau  $\mathfrak{B}$ -adique (paragraphe 2) et dans le cas où  $A$  est un anneau d'entiers algébriques (paragraphe 3), puis de les compléter en donnant de  $v(m; A)$  une majoration explicite et indépendante de  $A$ , toujours dans le cas où  $A$  est un anneau d'entiers algébriques (théorème (3.3), démontré au paragraphe 4); ce dernier résultat est une conséquence presque immédiate d'un résultat de Ramanujam (th. (2.3)) dont la démonstration, donnée dans [9], est d'ailleurs longue et délicate.

## 2. SOMMES DE PUISSANCES $m^{\text{ièmes}}$ DANS UN ANNEAU $\mathfrak{B}$ -ADIQUE

Pour des raisons de commodité, adoptons une notation: si  $p$  est un nombre premier, si  $q = p^f$  ( $f \geq 1$ ) est un nombre  $p$ -primaire et si  $m$  est un entier positif quelconque, nous désignerons par le symbole  $[q; m]$  le plus petit nombre  $p$ -primaire  $p^g$  ayant les deux propriétés suivantes:

l'exposant  $g$  divise l'exposant  $f$ ;  
le quotient  $(p^f - 1)/(p^g - 1)$  divise l'entier  $m$ .

On a alors ce résultat élémentaire (pour une démonstration, voir par exemple [8], th. 2.3)):

*Lemme (2.1).* Soit  $k = \mathbb{F}_q$  le corps fini à  $q = p^f$  éléments. Si  $m$  est un entier positif,  $k_m$  est égal au sous-corps de  $k$  contenant exactement  $[q; m]$  éléments:

$$k_m = \mathbb{F}_{[q; m]}.$$

\*

Ces préliminaires étant posés, désignons par  $A$  un anneau  $\mathfrak{B}$ -adique (c'est-à-dire un anneau de valuation discrète complet d'inégales caracté-