

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 14 (1968)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SOMMES DE PUISSANCES  $m$  iemes DANS LES ANNEAUX  $\beta$ -ADRIQUES ET LES ANNEAUX D'ENTRIERS ALGÈBRIQUES  
**Autor:** Joly, Jean-René  
**Kapitel:** 2. Sommes de puissances  $m$  iemes dans un anneau  $\beta$ -adrique  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-42351>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 08.02.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

d'années l'objet de travaux fort nombreux; mais ces travaux reposent presque exclusivement sur l'application de techniques *analytiques* (en fait, diverses généralisations et améliorations des méthodes de Hardy et Littlewood) et, faute de compétence suffisante en ce domaine, nous nous abstenons de les envisager ici.

\*

En fait, le but de ce court article est de résumer les résultats actuellement connus (connus de l'auteur, bien entendu) relatifs à  $w(m; A)$ ,  $v(m; A)$  et  $A_m$  dans le cas où  $A$  est un anneau  $\mathfrak{B}$ -adique (paragraphe 2) et dans le cas où  $A$  est un anneau d'entiers algébriques (paragraphe 3), puis de les compléter en donnant de  $v(m; A)$  une majoration explicite et indépendante de  $A$ , toujours dans le cas où  $A$  est un anneau d'entiers algébriques (théorème (3.3), démontré au paragraphe 4); ce dernier résultat est une conséquence presque immédiate d'un résultat de Ramanujam (th. (2.3)) dont la démonstration, donnée dans [9], est d'ailleurs longue et délicate.

## 2. SOMMES DE PUISSANCES $m^{\text{ièmes}}$ DANS UN ANNEAU $\mathfrak{B}$ -ADIQUE

Pour des raisons de commodité, adoptons une notation: si  $p$  est un nombre premier, si  $q = p^f$  ( $f \geq 1$ ) est un nombre  $p$ -primaire et si  $m$  est un entier positif quelconque, nous désignerons par le symbole  $[q; m]$  le plus petit nombre  $p$ -primaire  $p^g$  ayant les deux propriétés suivantes:

l'exposant  $g$  divise l'exposant  $f$ ;  
le quotient  $(p^f - 1)/(p^g - 1)$  divise l'entier  $m$ .

On a alors ce résultat élémentaire (pour une démonstration, voir par exemple [8], th. 2.3)):

*Lemme (2.1).* Soit  $k = \mathbb{F}_q$  le corps fini à  $q = p^f$  éléments. Si  $m$  est un entier positif,  $k_m$  est égal au sous-corps de  $k$  contenant exactement  $[q; m]$  éléments:

$$k_m = \mathbb{F}_{[q; m]}.$$

\*

Ces préliminaires étant posés, désignons par  $A$  un anneau  $\mathfrak{B}$ -adique (c'est-à-dire un anneau de valuation discrète complet d'inégales caracté-

ristiques à corps résiduel fini), et soient  $k$  le corps résiduel de  $A$ ,  $q = p^f$  le nombre d'éléments de  $k$  et  $e$  l'indice de ramification absolu de  $A$ .

*Théorème (2.2)* (voir [8], th. (2.19)). Les deux assertions suivantes sont équivalentes:

- (a)  $A = A_m$ ;
- (b)  $k = k_m$ , et de plus, si  $p$  divise  $m$ ,  $A$  est absolument non-ramifié.

Compte tenu du lemme (2.1), l'égalité  $A = A_m$  équivaut donc à la condition « numérique » ci-dessous:

- (c)  $[q; m] = q$ , et de plus, si  $p$  divise  $m$ ,  $e = 1$ .

Ajoutons deux choses: tout d'abord, dans un anneau  $\mathfrak{B}$ -adique,  $-1$  est toujours somme de puissances  $m^{iemes}$  (voir par exemple [8], th. (6.19)): l'égalité  $A = A_m$  implique donc en fait que tout élément de  $A$  est somme de puissances  $m^{iemes}$ ; par ailleurs, même lorsque  $A \neq A_m$ ,  $A_m$  est un anneau local, séparé, complet, de dimension 1 (mais non intégralement clos), et  $A$  est un  $A_m$ -module de type fini (voir [8], prop. (3.14)).

\*

*Théorème (2.3)* (voir [9], prop. 3). On a la majoration suivante, indépendante de l'anneau ( $\mathfrak{B}$ -adique)  $A$ :

$$w(m; A) \leq 8m^5.$$

Signalons que Birch a donné, par une méthode complètement différente, la majoration (également indépendante de  $A$ )  $w(m; A) \leq m^{16m^2}$ ; par ailleurs, nous avons prouvé nous-même que si  $m$  est *premier impair*, on a la majoration plus précise  $w(m; A) \leq 2m - 1$  (voir respectivement [3], th. 1, et [8], th. (7.34)).

### 3. SOMMES DE PUISSANCES $m^{iemes}$ DANS UN ANNEAU D'ENTIERS ALGÈBRIQUES

Soient maintenant  $A$  un anneau d'entiers algébriques,  $K$  le corps des fractions de  $A$ , et  $d$  le discriminant de  $K$ ; pour tout idéal premier non nul  $\mathfrak{p}$  de  $A$ , convenons de désigner par  $c_p$  la caractéristique de  $A/\mathfrak{p} = A_p/\mathfrak{p}A_p$ , par  $e_p$  et  $f_p$  l'indice de ramification absolu et le degré résiduel absolu de  $A_p$ , et par  $N_p$  le nombre d'éléments de  $A/\mathfrak{p} = A_p/\mathfrak{p}A_p$ ; on a donc  $N_p = c_p^{f_p}$ .