

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 14 (1968)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SOMMES DE PUISSANCES  $m$  iemes DANS LES ANNEAUX  $\beta$ -  
ADRIQUES ET LES ANNEAUX D'ENTRIERS ALGÉBRIQUES  
**Autor:** Joly, Jean-René  
**Kapitel:** 3. Sommes de puissances  $m$  iemes dans un anneau d'entiers  
algébriques  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-42351>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 31.01.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

ristiques à corps résiduel fini), et soient  $k$  le corps résiduel de  $A$ ,  $q = p^f$  le nombre d'éléments de  $k$  et  $e$  l'indice de ramification absolu de  $A$ .

*Théorème (2.2)* (voir [8], th. (2.19)). Les deux assertions suivantes sont équivalentes:

- (a)  $A = A_m$ ;
- (b)  $k = k_m$ , et de plus, si  $p$  divise  $m$ ,  $A$  est absolument non-ramifié.

Compte tenu du lemme (2.1), l'égalité  $A = A_m$  équivaut donc à la condition « numérique » ci-dessous:

- (c)  $[q; m] = q$ , et de plus, si  $p$  divise  $m$ ,  $e = 1$ .

Ajoutons deux choses: tout d'abord, dans un anneau  $\mathfrak{B}$ -adique,  $-1$  est toujours somme de puissances  $m^{iemes}$  (voir par exemple [8], th. (6.19)): l'égalité  $A = A_m$  implique donc en fait que tout élément de  $A$  est somme de puissances  $m^{iemes}$ ; par ailleurs, même lorsque  $A \neq A_m$ ,  $A_m$  est un anneau local, séparé, complet, de dimension 1 (mais non intégralement clos), et  $A$  est un  $A_m$ -module de type fini (voir [8], prop. (3.14)).

\*

*Théorème (2.3)* (voir [9], prop. 3). On a la majoration suivante, indépendante de l'anneau ( $\mathfrak{B}$ -adique)  $A$ :

$$w(m; A) \leq 8m^5.$$

Signalons que Birch a donné, par une méthode complètement différente, la majoration (également indépendante de  $A$ )  $w(m; A) \leq m^{16m^2}$ ; par ailleurs, nous avons prouvé nous-même que si  $m$  est *premier impair*, on a la majoration plus précise  $w(m; A) \leq 2m - 1$  (voir respectivement [3], th. 1, et [8], th. (7.34)).

### 3. SOMMES DE PUISSANCES $m^{iemes}$ DANS UN ANNEAU D'ENTIERS ALGÈBRIQUES

Soient maintenant  $A$  un anneau d'entiers algébriques,  $K$  le corps des fractions de  $A$ , et  $d$  le discriminant de  $K$ ; pour tout idéal premier non nul  $\mathfrak{p}$  de  $A$ , convenons de désigner par  $c_p$  la caractéristique de  $A/\mathfrak{p} = A_p/\mathfrak{p}A_p$ , par  $e_p$  et  $f_p$  l'indice de ramification absolu et le degré résiduel absolu de  $A_p$ , et par  $N_p$  le nombre d'éléments de  $A/\mathfrak{p} = A_p/\mathfrak{p}A_p$ ; on a donc  $N_p = c_p^{f_p}$ .

*Théorème (3.1)* (voir [2], th. 1, d'une part, et [6], th. 5 ou [8], th. (4.11), d'autre part). Les deux assertions suivantes sont équivalentes:

(a)  $A = A_m$ ;

(b) Pour tout idéal premier non nul  $\mathfrak{p}$  de  $A$ , on a  $A/\mathfrak{p} = (A/\mathfrak{p})_m$ , et de plus, si  $c_{\mathfrak{p}}$  divise  $m$ , on a  $e_{\mathfrak{p}} = 1$ .

Notons que, compte tenu du lemme (2.1) et du lien entre discriminant et ramification, l'égalité  $A = A_m$  équivaut ici encore à une condition « numérique »:

(c) Pour tout idéal premier non nul  $\mathfrak{p}$  de  $A$ , on a l'égalité  $[N\mathfrak{p}; m] = N\mathfrak{p}$ , et de plus,  $m$  est étranger au discriminant  $d$ .

(La condition  $[N\mathfrak{p}; m] = N\mathfrak{p}$  est d'ailleurs automatiquement vérifiée dès que  $c_{\mathfrak{p}} > m$ ; il n'y a donc en fait qu'un nombre fini de vérifications numériques à effectuer pour voir si un couple  $(A, m)$  satisfait à la condition (c)).

Le théorème (3.1) a été démontré pour la première fois par Siegel pour  $m = 2$  (voir [10], th. V) et par Bateman et Stemmler pour  $m$  premier quelconque (voir [1], th. 3). En ce qui concerne le cas général, la démonstration donnée dans [2] par Bhaskaran est de type *arithmétique* en ce sens qu'elle s'appuie sur des calculs de congruences modulo des puissances d'idéaux premiers; elle utilise d'ailleurs certains des résultats obtenus par Bateman et Stemmler dans [1] et [11]; la démonstration du théorème (3.1) que nous donnons nous-même dans [6] est au contraire de type *algébrique*: elle consiste à noter que  $A = A_m$  si et seulement si  $A_{\mathfrak{p}} = (A_{\mathfrak{p}})_m$  pour tout idéal premier  $\mathfrak{p}$  non nul de  $A$ , puis que  $A_{\mathfrak{p}} = (A_{\mathfrak{p}})_m$  si et seulement si  $\hat{A}_{\mathfrak{p}} = (\hat{A}_{\mathfrak{p}})_m$ ; comme  $\hat{A}_{\mathfrak{p}}$  est un anneau  $\mathfrak{B}$ -adique, il suffit alors d'utiliser le théorème (2.2). Naturellement, les deux démonstrations sont essentiellement équivalentes; remarquons simplement que les techniques de l'Algèbre Commutative (localisation, complétion, ...) sont particulièrement bien adaptées au type de problème envisagé ici; nous aurons d'ailleurs une nouvelle occasion de le constater au paragraphe suivant.

\*

*Théorème (3.2)* (voir [2], th. 1). Pour tout entier positif  $m$ , il existe un entier  $b(m)$  tel qu'on ait la majoration

$$v(m; A) \leq b(m)$$

pour tout anneau d'entiers algébriques  $A$ .

Ce théorème est tout à fait analogue au théorème (2.3), à ceci près qu'il ne nous donne pas d'ordre de grandeur pour la quantité majorante. Nous allons combler cette lacune en démontrant le résultat suivant:

*Théorème (3.3).* Quels que soient l'entier positif  $m$  et l'anneau d'entiers algébriques  $A$ , on a l'inégalité

$$v(m; A) \leq 2^m + 8m^5.$$

Le théorème (3.3) généralise l'inégalité

$$v(m; A) \leq 2^{m-1} + (m-1)/3 + 1$$

obtenue par Stemmler (voir [11]) dans le cas où l'exposant  $m$  est *premier*; l'ordre de grandeur est seulement un peu moins bon:  $2^m$  au lieu de  $2^{m-1}$  (ceci tient au fait qu'on est obligé, dans le cas général, d'envisager les valeurs *paires* de  $m$ ).

#### 4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME (3.3).

*Lemme (4.1).* Soient  $A$  un anneau,  $m$  un entier positif. et  $B$  un anneau quotient de  $A$ . On a alors l'inégalité

$$v(m; B) \leq v(m; A).$$

*Lemme (4.2.)* Soient  $A_1, A_2, \dots, A_r$  des anneaux en nombre fini, et soit  $B$  leur produit. On a alors l'inégalité

$$w(m; B) \leq \sup_{1 \leq i \leq r} w(m; A_i).$$

La démonstration de ces deux lemmes est immédiate; signalons seulement que le lemme (4.2) devient faux si on y remplace  $w$  par  $v$  (comme on le voit sur l'exemple suivant:  $r = 2$ ,  $m = 2$ , et  $A_1 = A_2 = \mathbf{R}$ ).

*Lemme (4.3.)* Soient  $A$  un anneau,  $m$  et  $s$  deux entiers positifs et  $\alpha$  un idéal de  $A$  ayant la propriété suivante:

tout élément de  $\alpha$  est de la forme

$$(4) \quad \pm a_1^m \pm a_2^m \pm \dots \pm a_s^m \quad (a_1, a_2, \dots, a_s \in A);$$

on a alors l'inégalité

$$v(m; A) \leq s + v(m; A/\alpha).$$