

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 14 (1968)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SOMMES DE PUISSANCES  $m$  iemes DANS LES ANNEAUX  $\beta$ -  
ADRIQUES ET LES ANNEAUX D'ENTRIERS ALGÈBRIQUES  
**Autor:** Joly, Jean-René  
**Kapitel:** 4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME (3.3).  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-42351>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 01.02.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Ce théorème est tout à fait analogue au théorème (2.3), à ceci près qu'il ne nous donne pas d'ordre de grandeur pour la quantité majorante. Nous allons combler cette lacune en démontrant le résultat suivant:

*Théorème (3.3).* Quels que soient l'entier positif  $m$  et l'anneau d'entiers algébriques  $A$ , on a l'inégalité

$$v(m; A) \leq 2^m + 8m^5.$$

Le théorème (3.3) généralise l'inégalité

$$v(m; A) \leq 2^{m-1} + (m-1)/3 + 1$$

obtenue par Stemmler (voir [11]) dans le cas où l'exposant  $m$  est *premier*; l'ordre de grandeur est seulement un peu moins bon:  $2^m$  au lieu de  $2^{m-1}$  (ceci tient au fait qu'on est obligé, dans le cas général, d'envisager les valeurs *paires* de  $m$ ).

#### 4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME (3.3).

*Lemme (4.1).* Soient  $A$  un anneau,  $m$  un entier positif. et  $B$  un anneau quotient de  $A$ . On a alors l'inégalité

$$v(m; B) \leq v(m; A).$$

*Lemme (4.2.)* Soient  $A_1, A_2, \dots, A_r$  des anneaux en nombre fini, et soit  $B$  leur produit. On a alors l'inégalité

$$w(m; B) \leq \sup_{1 \leq i \leq r} w(m; A_i).$$

La démonstration de ces deux lemmes est immédiate; signalons seulement que le lemme (4.2) devient faux si on y remplace  $w$  par  $v$  (comme on le voit sur l'exemple suivant:  $r = 2$ ,  $m = 2$ , et  $A_1 = A_2 = \mathbf{R}$ ).

*Lemme (4.3.)* Soient  $A$  un anneau,  $m$  et  $s$  deux entiers positifs et  $\alpha$  un idéal de  $A$  ayant la propriété suivante:

tout élément de  $\alpha$  est de la forme

$$(4) \quad \pm a_1^m \pm a_2^m \pm \dots \pm a_s^m \quad (a_1, a_2, \dots, a_s \in A);$$

on a alors l'inégalité

$$v(m; A) \leq s + v(m; A/\alpha).$$

Il suffit pour le voir d'appliquer la définition de  $v(m; A)$ .

*Lemme (4.4).* Soient  $A$  un anneau d'entiers algébriques,  $m$  et  $n$  deux entiers positifs et  $\mathfrak{p}$  un idéal premier non nul de  $A$ . on a alors l'inégalité

$$w(m; A/\mathfrak{p}^n) \leq 8m^5.$$

Prouvons ce lemme:  $\mathfrak{p}$  étant en fait un idéal maximal de  $A$ , on a un isomorphisme canonique

$$A/\mathfrak{p}^n \simeq A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^n A_{\mathfrak{p}}$$

(voir [4], chap. II, § 3, n° 3, prop. 9); mais on a également un isomorphisme canonique

$$A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^n A_{\mathfrak{p}} \simeq \widehat{A}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^n \widehat{A}_{\mathfrak{p}}$$

(voir [4], chap. III, § 2, n° 12, formules (21), et n° 13, prop. 19).  $A/\mathfrak{p}^n$  est donc isomorphe à un quotient de  $\widehat{A}_{\mathfrak{p}}$ , d'où, en appliquant le lemme (4.1),

$$w(m; A/\mathfrak{p}^n) \leq w(m; \widehat{A}_{\mathfrak{p}});$$

le lemme (4.4) résulte alors du théorème (2.3), et du fait que  $\widehat{A}_{\mathfrak{p}}$  est un anneau  $\mathfrak{B}$ -adique.

\*

Venons-en alors à la démonstration du théorème (3.3). Soient  $A$  un anneau d'entiers algébriques et  $m$  un entier positif; l'identité bien connue (voir par exemple [5], th. 402)

$$(5) \quad m! a = \sum_{h=0}^{m-1} \binom{m-1}{h} (-1)^{m-1-h} ((a+h)^m - h^m)$$

montre que tout élément de l'idéal  $\mathfrak{a} = m!A$  est de la forme (4) (voir lemme (4.3)) avec

$$s = 2 \sum_{h=0}^{m-1} \binom{m-1}{h} = 2 \cdot 2^{m-1} = 2^m;$$

le lemme (4.3) donne donc l'inégalité

$$v(m; A) \leq 2^m + v(m; A/\mathfrak{a}).$$

D'autre part, dans  $A/\mathfrak{a}$ , qui est un anneau fini,  $-1$  est somme de puissances  $m^{\text{ièmes}}$ , d'où évidemment l'inégalité

$$v(m; A/\mathfrak{a}) \leq w(m; A/\mathfrak{a}).$$

Il suffit donc en fait de prouver l'inégalité

$$(6) \quad w(m; A/\alpha) \leq 8m^5;$$

or, dans  $A$ , qui est un anneau de Dedekind, l'idéal  $\alpha$  se décompose en facteurs premiers:

$$\alpha = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_r^{n_r}$$

(les  $p_i$  premiers non nuls et deux à deux distincts, les  $n_i > 0$ ), et le « théorème chinois » (voir par exemple [4], chap. II, § 1, n° 2, prop. 5) donne un isomorphisme canonique

$$A/\alpha \simeq (A/p_1^{n_1}) \times (A/p_2^{n_2}) \times \dots \times (A/p_r^{n_r});$$

l'inégalité (6) résulte alors immédiatement des lemmes (4.2) et (4.4). Et le théorème (3.3) se trouve démontré.

\*

Deux remarques pour terminer:

a) Tout d'abord, si l'exposant  $m$  est *impair*, on peut, au lieu de (5), utiliser l'identité

$$m!(a + (m-1)/2) = \sum_{h=0}^{m-1} \binom{m-1}{h} (-1)^{m-1-h} (a+h)^m,$$

qui n'en est d'ailleurs qu'une écriture différente; la démonstration ci-dessus mène alors à la majoration plus précise

$$v(m; A) \leq 2^{m-1} + 8m^5.$$

b) Si maintenant l'exposant  $m$  est *premier impair*, l'inégalité (6) peut être remplacée par celle-ci:

$$(8) \quad w(m; A/\alpha) \leq 2m-1;$$

il suffit pour le voir d'appliquer le résultat signalé dans les dernières lignes du paragraphe 2. Remplaçant dans la démonstration ci-dessus l'identité (5) par l'identité (7) et la majoration (6) par la majoration (8), on obtient alors l'inégalité

$$v(m; A) \leq 2^{m-1} + 2m-1,$$

toujours pour un anneau d'entiers algébriques  $A$ , bien entendu.

\*