

4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME (3.3).

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **14 (1968)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ce théorème est tout à fait analogue au théorème (2.3), à ceci près qu'il ne nous donne pas d'ordre de grandeur pour la quantité majorante. Nous allons combler cette lacune en démontrant le résultat suivant:

Théorème (3.3). Quels que soient l'entier positif m et l'anneau d'entiers algébriques A , on a l'inégalité

$$v(m; A) \leq 2^m + 8m^5.$$

Le théorème (3.3) généralise l'inégalité

$$v(m; A) \leq 2^{m-1} + (m-1)/3 + 1$$

obtenue par Stemmler (voir [11]) dans le cas où l'exposant m est *premier*; l'ordre de grandeur est seulement un peu moins bon: 2^m au lieu de 2^{m-1} (ceci tient au fait qu'on est obligé, dans le cas général, d'envisager les valeurs *paires* de m).

4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME (3.3).

Lemme (4.1). Soient A un anneau, m un entier positif. et B un anneau quotient de A . On a alors l'inégalité

$$v(m; B) \leq v(m; A).$$

Lemme (4.2.) Soient A_1, A_2, \dots, A_r des anneaux en nombre fini, et soit B leur produit. On a alors l'inégalité

$$w(m; B) \leq \sup_{1 \leq i \leq r} w(m; A_i).$$

La démonstration de ces deux lemmes est immédiate; signalons seulement que le lemme (4.2) devient faux si on y remplace w par v (comme on le voit sur l'exemple suivant: $r = 2$, $m = 2$, et $A_1 = A_2 = \mathbf{R}$).

Lemme (4.3.) Soient A un anneau, m et s deux entiers positifs et α un idéal de A ayant la propriété suivante:

tout élément de α est de la forme

$$(4) \quad \pm a_1^m \pm a_2^m \pm \dots \pm a_s^m \quad (a_1, a_2, \dots, a_s \in A);$$

on a alors l'inégalité

$$v(m; A) \leq s + v(m; A/\alpha).$$

Il suffit pour le voir d'appliquer la définition de $v(m; A)$.

Lemme (4.4). Soient A un anneau d'entiers algébriques, m et n deux entiers positifs et \mathfrak{p} un idéal premier non nul de A . on a alors l'inégalité

$$w(m; A/\mathfrak{p}^n) \leq 8m^5.$$

Prouvons ce lemme: \mathfrak{p} étant en fait un idéal maximal de A , on a un isomorphisme canonique

$$A/\mathfrak{p}^n \simeq A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^n A_{\mathfrak{p}}$$

(voir [4], chap. II, § 3, n° 3, prop. 9); mais on a également un isomorphisme canonique

$$A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^n A_{\mathfrak{p}} \simeq \widehat{A}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^n \widehat{A}_{\mathfrak{p}}$$

(voir [4], chap. III, § 2, n° 12, formules (21), et n° 13, prop. 19). A/\mathfrak{p}^n est donc isomorphe à un quotient de $\widehat{A}_{\mathfrak{p}}$, d'où, en appliquant le lemme (4.1),

$$w(m; A/\mathfrak{p}^n) \leq w(m; \widehat{A}_{\mathfrak{p}});$$

le lemme (4.4) résulte alors du théorème (2.3), et du fait que $\widehat{A}_{\mathfrak{p}}$ est un anneau \mathfrak{B} -adique.

*

Venons-en alors à la démonstration du théorème (3.3). Soient A un anneau d'entiers algébriques et m un entier positif; l'identité bien connue (voir par exemple [5], th. 402)

$$(5) \quad m! a = \sum_{h=0}^{m-1} \binom{m-1}{h} (-1)^{m-1-h} ((a+h)^m - h^m)$$

montre que tout élément de l'idéal $\mathfrak{a} = m!A$ est de la forme (4) (voir lemme (4.3)) avec

$$s = 2 \sum_{h=0}^{m-1} \binom{m-1}{h} = 2 \cdot 2^{m-1} = 2^m;$$

le lemme (4.3) donne donc l'inégalité

$$v(m; A) \leq 2^m + v(m; A/\mathfrak{a}).$$

D'autre part, dans A/\mathfrak{a} , qui est un anneau fini, -1 est somme de puissances $m^{\text{ièmes}}$, d'où évidemment l'inégalité

$$v(m; A/\mathfrak{a}) \leq w(m; A/\mathfrak{a}).$$

Il suffit donc en fait de prouver l'inégalité

$$(6) \quad w(m; A/\alpha) \leq 8m^5;$$

or, dans A , qui est un anneau de Dedekind, l'idéal α se décompose en facteurs premiers:

$$\alpha = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_r^{n_r}$$

(les p_i premiers non nuls et deux à deux distincts, les $n_i > 0$), et le « théorème chinois » (voir par exemple [4], chap. II, § 1, n° 2, prop. 5) donne un isomorphisme canonique

$$A/\alpha \simeq (A/p_1^{n_1}) \times (A/p_2^{n_2}) \times \dots \times (A/p_r^{n_r});$$

l'inégalité (6) résulte alors immédiatement des lemmes (4.2) et (4.4). Et le théorème (3.3) se trouve démontré.

*

Deux remarques pour terminer:

a) Tout d'abord, si l'exposant m est *impair*, on peut, au lieu de (5), utiliser l'identité

$$m!(a + (m-1)/2) = \sum_{h=0}^{m-1} \binom{m-1}{h} (-1)^{m-1-h} (a+h)^m,$$

qui n'en est d'ailleurs qu'une écriture différente; la démonstration ci-dessus mène alors à la majoration plus précise

$$v(m; A) \leq 2^{m-1} + 8m^5.$$

b) Si maintenant l'exposant m est *premier impair*, l'inégalité (6) peut être remplacée par celle-ci:

$$(8) \quad w(m; A/\alpha) \leq 2m-1;$$

il suffit pour le voir d'appliquer le résultat signalé dans les dernières lignes du paragraphe 2. Remplaçant dans la démonstration ci-dessus l'identité (5) par l'identité (7) et la majoration (6) par la majoration (8), on obtient alors l'inégalité

$$v(m; A) \leq 2^{m-1} + 2m-1,$$

toujours pour un anneau d'entiers algébriques A , bien entendu.

*