

# **SUR QUELQUES APPLICATIONS DE LA «MÉTHODE DE L'HYPERBOLE» DE DIRICHLET A LA THÉORIE DES NOMBRES PREMIERS**

Autor(en): **Saffari, Bahman**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **14 (1968)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-42352>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# SUR QUELQUES APPLICATIONS DE LA « MÉTHODE DE L'HYPERBOLE » DE DIRICHLET A LA THÉORIE DES NOMBRES PREMIERS

Bahman SAFFARI

## I. INTRODUCTION

1. La « méthode de l'hyperbole » que nous exposons ci-après sur quelques exemples est une méthode élémentaire donnant de bons résultats dans les théorèmes asymptotiques. Certaines questions de théorie des nombres se ramènent au problème suivant: donner une évaluation asymptotique, lorsque  $x \rightarrow +\infty$ , de  $F(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} f(n)$ , où  $f$  est le « produit de convolution » de deux fonctions arithmétiques <sup>1)</sup>  $g$  et  $h$ , définie par:

$$f(n) = (g * h)(n) = \sum_{k|n} g(k) h\left(\frac{n}{k}\right).$$

Connaissant  $G(x) = \sum_{1 \leq k \leq x} g(k)$  et  $H(x) = \sum_{1 \leq l \leq x} h(l)$ , on peut évaluer  $F(x)$  grâce à:

$$(1) \quad F(x) = \sum_{1 \leq k \leq x} g(k) H\left(\frac{x}{k}\right) = \sum_{1 \leq l \leq x} h(l) G\left(\frac{x}{l}\right).$$

Les résultats que l'on obtient par application de (1) sont au plus aussi bons que ceux obtenus par le procédé suivant (méthode de l'hyperbole):

Pour tout  $\xi$  tel que  $1 \leq \xi \leq x$ , on a:

$$(2) \quad F(x) = \sum_{1 \leq k \leq \xi} g(k) H\left(\frac{x}{k}\right) + \sum_{1 \leq l \leq \frac{x}{\xi}} h(l) G\left(\frac{x}{l}\right) - G(\xi) H\left(\frac{x}{\xi}\right).$$

Chacun des trois termes du second membre de (2) fournit un terme-erreur, le terme-erreur global résultant alors de l'addition de ces trois termes-erreurs. On choisit  $\xi$  de manière que le terme-erreur global devienne le meilleur possible. Le nom de la « méthode de l'hyperbole » vient de ce que  $F(x)$  est la somme des  $g(k) h(l)$  où  $(k, l)$  décrit les points à coordonnées

1) Par « fonction arithmétique » nous entendons ici une fonction à valeurs réelles ou complexes, et définie sur les entiers  $\geq 1$ .

entières  $> 0$  en dessous de l'hyperbole d'équation  $uv = x$ , et que la formule (2) constitue, pour le calcul de cette somme, un procédé dont la signification géométrique est évidente.

2. Le premier exemple historique (Dirichlet [1]) est celui du cas  $g(n) = h(n) = 1$ . Alors  $f(n) = d(n) =$  nombre des diviseurs de  $n$ . Il est alors bien connu <sup>2)</sup> que la formule (1) donne:

$$\sum_{1 \leq n \leq x} d(n) = x \log x + O(x),$$

tandis que la méthode de l'hyperbole donne, avec  $\xi = \sqrt{x}$ :

$$(3) \quad \sum_{1 \leq n \leq x} d(n) = x \log x + (2\gamma - 1)x + O\left(x^{\frac{1}{2}}\right),$$

$\gamma$  désignant la constante d'Euler.

Cependant on démontre, par des méthodes analytiques, qu'en fait le terme-erreur de (3) est  $O(x^c)$ , pour une constante convenable  $c < \frac{1}{3}$  (cf. par exemple [2] et [3]).

3. Nous démontrons ci-dessous, par la méthode de l'hyperbole, certains résultats nouveaux, que l'on ne peut guère rendre plus précis par des méthodes analytiques (cependant voir ci-dessous IV).

## II. SUR UN THÉOREME DE HARDY ET RAMANUJAN

1. Soit  $\omega(n)$  le nombre des diviseurs premiers distincts de l'entier positif  $n$ . Hardy et Ramanujan [4] ont prouvé que, lorsque  $x \rightarrow +\infty$ :

$$\sum_{1 \leq n \leq x} \omega(n) = x \log \log x + Bx + O\left(\frac{x}{\log x}\right),$$

où  $B$  est une constante  $[B = \gamma + \sum_p (\log(1 - \frac{1}{p}) + \frac{1}{p})]$ , la sommation étant étendue à tous les  $p$  premiers <sup>3)</sup>. De plus, Hardy et Ramanujan ([4], p. 347) annoncent que ce théorème asymptotique peut être amélioré « par des méthodes transcendentes ». Cependant, à notre connaissance, aucune telle amélioration n'a été publiée à ce jour.

Nous démontrons ici:

2) Voir par exemple [12] ou [13].

3) Dans tout cet article, les lettres  $p, p', p'', \dots$  désigneront exclusivement des nombres premiers; la lettre  $q$  désignera exclusivement les entiers « quadratfrei ».

THÉORÈME 1. *Pour deux entiers donnés  $k, l$  ( $k \geq 1$ ), premiers entre eux, soit  $\omega_{k,l}(n)$  le nombre des diviseurs premiers distincts  $p$  de  $n$  tels que  $p \equiv l \pmod{k}$ . Alors, lorsque  $x \rightarrow +\infty$ , on a pour tout entier  $m \geq 1$ :*

$$\sum_{1 \leq n \leq x} \omega_{k,l}(n) = \frac{x \log \log x}{\varphi(k)} + B_{k,l}x + \sum_{r=1}^m \frac{C_r}{\varphi(k)} \cdot \frac{x}{(\log x)^r} + O\left[\frac{x}{(\log x)^{m+1}}\right],$$

$B_{k,l}$  étant une constante dépendant de  $k$  et  $l$ ,  $\varphi(k)$  étant la fonction d'Euler, et les constantes  $C_r$  étant définies de la façon suivante (en notant par  $\{t\}$  la partie fractionnaire<sup>4)</sup> de  $t$ ):

$$C_r = - \int_1^{+\infty} \frac{\{t\}}{t^2} (\log t)^{r-1} dt = \frac{(-1)^{r-1}}{r} \cdot \frac{d^r}{ds^r} \left( \frac{(s-1)\zeta(s)}{s} \right)_{s=1}$$

[et en particulier  $C_1 = \gamma - 1$ ].

Le théorème 1 est une conséquence du résultat plus précis suivant:

THÉORÈME 2. *Soit  $\pi_{k,l}(x)$  le nombre de nombres premiers  $p \leq x$  tels que  $p \equiv l \pmod{k}$ , et soient  $C, \alpha, \beta$ , trois constantes (avec  $C > 0, \alpha > 0$ ) telles que, lorsque  $x \rightarrow +\infty$ , on ait:*

$$\pi_{k,l}(x) = \frac{1}{\varphi(k)} \int_2^x \frac{dt}{\log t} + O\left[x \exp\left(-C(\log x)^\alpha (\log \log x)^\beta\right)\right]^5).$$

Alors il existe une constante  $C' > 0$  telle que, pour  $x \rightarrow +\infty$ :

$$\sum_{1 \leq n \leq x} \omega_{k,l}(n) = \frac{x \log \log x}{\varphi(k)} + B_{k,l}x - \frac{x}{\varphi(k)} \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\{t\}}{t^2 (\log x - \log t)} dt + O\left[x \exp\left(-C'(\log x)^\alpha (\log \log x)^\beta\right)\right].$$

En admettant l'hypothèse de Riemann généralisée concernant les séries  $L$  relatives aux caractères modulo  $k$  [hypothèse que nous désignerons désormais par  $(H_k)$ ], on peut considérablement améliorer le terme-erreur du théorème 2, grâce au:

4) Dans toute la suite,  $[t]$  désignera la partie entière du nombre réel  $t$ , et  $\{t\} = t - [t]$  sa partie fractionnaire.

5) Dans le cas général, on sait que cette relation est vraie avec  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$  (cf. [14], p. 46). Dans le cas  $k = l = 1$  de tous les nombres premiers, on sait qu'on peut prendre  $\alpha = \frac{3}{5}, \beta = -\frac{1}{5}$  (cf. [15]).

THÉORÈME 3. Moyennant l'hypothèse  $(H_k)$ , on a lorsque  $x \rightarrow +\infty$  :

$$\sum_{1 \leq n \leq x} \omega_{k,l}(n) = \frac{x \log \log x}{\varphi(k)} + B_{k,l}x - \frac{x}{\varphi(k)} \int_1^{x^{\frac{1}{3}} (\log x)^{-\frac{4}{3}}} \frac{\{t\}}{t^2 (\log x - \log t)} dt + O \left[ x^{\frac{2}{3}} (\log x)^{\frac{1}{3}} \right]$$

2. Démonstration des théorèmes 1 à 3.

a) Calcul préparatoire. Soient  $x$  et  $\xi$  tels que  $1 < \xi < x$ . Alors :

$$(4) \quad \sum_{1 \leq n \leq x} \omega_{k,l}(n) = \frac{x \log \log x}{\varphi(k)} + B_{k,l}x - \frac{x}{\varphi(k)} \int_1^{\frac{x}{\xi}} \frac{\{t\}}{t^2 (\log x - \log t)} dt - x \int_{\xi}^{+\infty} \frac{\eta_{k,l}(t)}{t^2} dt + \left\{ \frac{x}{\xi} \right\} \eta_{k,l}(\xi) + \sum_{1 \leq j \leq \frac{x}{\xi}} \eta_{k,l} \left( \frac{x}{j} \right) - \sum_{\substack{p \leq \xi \\ p \equiv l \pmod{k}}} \left\{ \frac{x}{p} \right\},$$

où on a posé

$$\pi_{k,l}(x) = \frac{\text{li}(x)}{\varphi(k)} + \eta_{k,l}(x) \quad (6)$$

En effet, nous avons tout d'abord, par application de la méthode de l'hyperbole :

$$(5) \quad \sum_{1 \leq n \leq x} \omega_{k,l}(n) = \sum_{\substack{p \leq \xi \\ p \equiv l \pmod{k}}} \left[ \frac{x}{p} \right] + \sum_{1 \leq j \leq \frac{x}{\xi}} \pi_{k,l} \left( \frac{x}{j} \right) - \left[ \frac{x}{\xi} \right] \pi_{k,l}(\xi)$$

Soit  $a$  tel que  $1 < a < \inf(\xi, 2)$ . Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p \leq \xi \\ p \equiv l \pmod{k}}} \frac{1}{p} &= \int_a^{\xi} \frac{d\pi_{k,l}(t)}{t} = \frac{\pi_{k,l}(\xi)}{\xi} + \int_a^{\xi} \frac{\pi_{k,l}(t)}{t^2} dt = \\ &= \frac{1}{\varphi(k)} \cdot \frac{\text{li}(\xi)}{\xi} + \frac{\eta_{k,l}(\xi)}{\xi} + \int_a^{\xi} \frac{\text{li}(t) dt}{\varphi(k) t^2} + \int_a^{\xi} \frac{\eta_{k,l}(t)}{t^2} dt. \end{aligned}$$

6) Pour  $x > 1$ ,  $\text{li}(x) = v. p. \int_0^x \frac{dt}{\log t}$ . Alors  $\text{li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} + O(1)$ , lorsque  $x \rightarrow +\infty$ .

Mais

$$\int_a^\xi \frac{\text{li}(t) dt}{t^2} = \frac{\text{li}(a)}{a} - \frac{\text{li}(\xi)}{\xi} + \int_a^\xi \frac{dt}{t \log t} = \frac{\text{li}(a)}{a} - \frac{\text{li}(\xi)}{\xi} + \log \log \xi - \log \log a.$$

D'où:

$$(6) \quad \sum_{\substack{p \leq \xi \\ p \equiv l \pmod{k}}} \frac{1}{p} = \frac{\log \log \xi}{\varphi(k)} + B_{k,l} + \frac{\eta_{k,l}(\xi)}{\xi} - \int_\xi^{+\infty} \frac{\eta_{k,l}(t)}{t^2} dt,$$

avec

$$(7) \quad B_{k,l} = \int_a^{+\infty} \frac{\eta_{k,l}(t)}{t^2} dt + \frac{1}{\varphi(k)} \cdot \frac{\text{li}(a)}{a} - \frac{\log \log a}{\varphi(k)}.$$

Des relations (6) et (7) on déduit que  $B_{k,l}$  ne dépend pas de  $a$ , mais seulement de  $k$  et  $l$ . D'autre part:

$$\sum_{1 \leq j \leq \frac{x}{\xi}} \pi_{k,l} \left( \frac{x}{j} \right) = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{1 \leq j \leq \frac{x}{\xi}} \text{li} \left( \frac{x}{j} \right) + \sum_{1 \leq j \leq \frac{x}{\xi}} \eta_{k,l} \left( \frac{x}{j} \right).$$

Mais

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq j \leq \frac{x}{\xi}} \text{li} \left( \frac{x}{j} \right) &= \int_1^{\frac{x}{\xi}} \text{li} \left( \frac{x}{t} \right) d[t] = \left[ \frac{x}{\xi} \right] \text{li}(\xi) + x \int_1^{\frac{x}{\xi}} \frac{[t]}{t^2 (\log x - \log t)} dt = \\ &= \left[ \frac{x}{\xi} \right] \text{li}(\xi) + x (\log \log x - \log \log \xi) - x \int_1^{\frac{x}{\xi}} \frac{\{t\}}{t^2 (\log x - \log t)} dt. \end{aligned}$$

D'où:

$$(8) \quad \begin{aligned} \sum_{1 \leq j \leq \frac{x}{\xi}} \pi_{k,l} \left( \frac{x}{j} \right) &= \frac{1}{\varphi(k)} \left[ \frac{x}{\xi} \right] \text{li}(\xi) + \frac{x}{\varphi(k)} (\log \log x - \log \log \xi) - \\ &- \frac{x}{\varphi(k)} \int_1^{\frac{x}{\xi}} \frac{\{t\}}{t^2 (\log x - \log t)} dt + \sum_{1 \leq j \leq \frac{x}{\xi}} \eta_{k,l} \left( \frac{x}{j} \right) \end{aligned}$$

La relation (4) s'obtient alors en portant (6) et (8) dans le second membre de (5), et après avoir tenu compte de :

$$\sum_{\substack{p \leq \xi \\ p \equiv l \pmod{k}}} \left[ \frac{x}{p} \right] = \sum_{\substack{p \leq \xi \\ p \equiv l \pmod{k}}} \frac{1}{p} - \sum_{\substack{p \leq \xi \\ p \equiv l \pmod{k}}} \left\{ \frac{x}{p} \right\}.$$

b) *Le théorème 2 implique le théorème 1.* En effet, pour  $1 \leq t \leq \sqrt{x}$ , nous avons

$$0 \leq \frac{\log t}{\log x} \leq \frac{1}{2},$$

de sorte que

$$\begin{aligned} x \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\{t\}}{t^2 (\log x - \log t)} dt &= \frac{x}{\log x} \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\{t\}}{t^2} \left(1 - \frac{\log t}{\log x}\right)^{-1} dt = \\ &= \frac{x}{\log x} \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\{t\}}{t^2} \left( \sum_{r=0}^{+\infty} \left(\frac{\log t}{\log x}\right)^r \right) dt = \sum_{r=0}^{m-1} \frac{x}{(\log x)^{r+1}} C_r - \\ &- \frac{x}{\log x} \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{\{t\}}{t^2} \sum_{r=0}^{m-1} \left(\frac{\log t}{\log x}\right)^r dt + \frac{x}{\log x} \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\{t\}}{t^2} \sum_{r \geq m} \left(\frac{\log t}{\log x}\right)^r dt = \\ &= \sum_{r=1}^m C_r \frac{x}{(\log x)^r} + O \left[ \frac{x}{(\log x)^{m+1}} \right], \end{aligned}$$

puisque'il existe une constante  $D_m$  (ne dépendant que de  $m$ ) telle que, pour  $0 \leq r \leq m - 1$  on ait :

$$\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{\{t\}}{t^2} (\log t)^r dt \leq D_m \frac{(\log x)^r}{\sqrt{x}}$$

et que d'autre part

$$\sum_{r \geq m} \left(\frac{\log t}{\log x}\right)^r \leq 2 \left(\frac{\log t}{\log x}\right)^m.$$

Comme, pour tout  $r \geq 1$ , nous avons :

$$\frac{\sqrt{x}}{\log x} = o \left( \frac{x}{(\log x)^r} \right), \quad \text{et} \quad x \exp(-C' (\log x)^\alpha (\log \log x)^\beta) = o \left( \frac{x}{(\log x)^r} \right),$$

il en résulte bien que le théorème 2 implique le théorème 1.

c) *Démonstration du théorème 2.* Soit  $\xi = \xi(x)$  tel que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \xi = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\xi} = +\infty$ . Nous avons:

$$\int_{\xi}^{+\infty} \frac{\eta_{k,l}(t)}{t^2} dt = O \left[ \int_{\xi}^{+\infty} \frac{1}{t} \exp(-C(\log t)^\alpha (\log \log t)^\beta) dt \right] =$$

$$= O \left[ \exp(-C(\log \xi)^\alpha (\log \log \xi)^\beta) (\log \xi)^{1-\alpha} (\log \log \xi)^{-\beta} \right]$$

et

$$\sum_{1 \leq j \leq \frac{x}{\xi}} \eta_{k,l} \left( \frac{x}{j} \right) = O \left[ \sum_{1 \leq j \leq \frac{x}{\xi}} \frac{x}{j} \exp \left( -C \left( \log \frac{x}{j} \right)^\alpha \left( \log \log \frac{x}{j} \right)^\beta \right) \right] =$$

$$= \begin{cases} O \left[ \exp(-C(\log \xi)^\alpha (\log \log \xi)^\beta) \log \frac{x}{\xi} \right] x \text{ si } \beta \geq 0 \\ O \left[ \exp(-C(\log x)^\alpha (\log \log x)^\beta) \log \frac{x}{\xi} \right] x \text{ si } \beta \leq 0. \end{cases}$$

D'après la relation (4) on voit donc, en prenant  $\xi = \sqrt{x}$ , que le théorème 2 est valable avec toute constante  $C'$  telle que  $C' < 2^{-\alpha} C$ .

d) *Démonstration du théorème 3.* Moyennant l'hypothèse  $(H_k)$  nous avons:  $\eta_{k,l}(\xi) = O(\sqrt{\xi} \log \xi)$ , et par suite les majorations

$$\int_{\xi}^{+\infty} \frac{\eta_{k,l}(t)}{t^2} dt = O \left( \int_{\xi}^{+\infty} t^{-\frac{3}{2}} \log t dt \right) = O \left( \frac{\log \xi}{\sqrt{\xi}} \right),$$

$$\text{et } \sum_{1 \leq j \leq \frac{x}{\xi}} \eta_{k,l} \left( \frac{x}{j} \right) = O \left( \frac{x}{\sqrt{\xi}} \log x \right),$$

et d'autre part

$$\sum_{\substack{p \leq \xi \\ p \equiv l \pmod{k}}} \left\{ \frac{x}{p} \right\} = O \left( \frac{\xi}{\log \xi} \right), \text{ et } \left\{ \frac{x}{\xi} \right\} \eta_{k,l}(\xi) = O(\sqrt{\xi} \log \xi) = O \left( \frac{\xi}{\log \xi} \right).$$

Le terme-erreur est donc d'ordre minimal dès que  $\frac{\xi}{\log \xi}$  et  $\frac{x}{\sqrt{\xi}} \log x$  sont de même ordre, ce qui est réalisé dès que  $\xi = x^{\frac{2}{3}} (\log x)^{\frac{4}{3}}$ . D'où le théorème 3.

3. De la démonstration du théorème 3 on tire facilement le résultat suivant:



*Corollaire 1.* Soit  $\xi(x)$  une fonction réelle définie sur  $[1, +\infty[$ , vérifiant

$$1 \leq \xi(x) \leq x, \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\xi(x)}{x^{\frac{2}{3}} \log x^{\frac{4}{3}}} = +\infty. \text{ Alors, si l'hypothèse } (H_k) \text{ est}$$

vraie, nous avons pour  $x \rightarrow +\infty$ :

$$\sum_{\substack{p \leq \xi(x) \\ p \equiv 1 \pmod{k}}} \left\{ \frac{x}{p} \right\} \sim \frac{1}{\varphi(k)} \cdot \frac{x}{\log x} \int_{\frac{x}{\xi(x)}}^{+\infty} \frac{\{t\}}{t^2} dt.$$

En particulier, lorsque  $\xi(x) = o(x)$ , nous avons:

$$\sum_{\substack{p \leq \xi(x) \\ p \equiv 1 \pmod{k}}} \left\{ \frac{x}{p} \right\} \sim \frac{\xi(x)}{2 \log x} \cdot \frac{1}{\varphi(k)}$$

Il nous semble raisonnable de conjecturer que la relation

$$\sum_{\substack{p \leq \xi(x) \\ p \equiv 1 \pmod{k}}} \left\{ \frac{x}{p} \right\} \sim \frac{\xi(x)}{2 \log x} \cdot \frac{1}{\varphi(k)}$$

reste vraie lorsque  $\xi(x) = x^{\frac{2}{3}} (\log x)^{\frac{4}{3}}$

[et même chaque fois que

$$\left. \frac{1}{2} < \liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log \xi(x)}{\log x} \leq \limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log \xi(x)}{\log x} < 1. \right]$$

Si cette conjecture est vraie, on peut améliorer le théorème 3, en obtenant un terme-erreur qui est  $o[x^{\frac{2}{3}} (\log x)^{\frac{4}{3}}]$ , et même mieux.

#### 4. Extensions des théorèmes 1 à 3.

a) De même que pour la somme  $\sum_{1 \leq n \leq x} \omega_{k,i}(n)$ , la méthode de l'hyperbole permet d'obtenir des résultats analogues aux théorèmes 1 à 3 (développement asymptotique et reste intégral) pour la somme  $\sum_{1 \leq n \leq x} (\omega_{k,i}(n))^h$ ,  $h$  entier  $\geq 2$ . Signalons seulement le développement asymptotique)<sup>7</sup>:

**THÉORÈME 4.** Soit  $h$  un entier  $\geq 1$ . Il existe dans  $\mathbf{R}[X]$  un polynôme  $P_0$  de degré  $h$  et de coefficient du terme du plus haut degré  $\frac{1}{\varphi(k)}$ , et une suite de

<sup>7</sup> H. Delange a récemment obtenu un tel résultat, et par une méthode différente et plus générale, pour toutes les fonctions additives à valeurs entières  $\geq 0$ , et valant 1 sur l'ensemble des nombres premiers.

polynômes  $P_1, P_2, \dots, P_r, \dots$  de degré  $h - 1$  tels que, lorsque  $x \rightarrow +\infty$ , on ait pour tout  $m \geq 1$  :

$$\sum_{1 \leq n \leq x} (\omega_{k,l}(n))^h = x \sum_{r=0}^m \frac{P_r(\log \log x)}{(\log x)^r} + O \left[ \frac{(\log \log x)^{h-1}}{(\log x)^{m+1}} \right]$$

Indiquons le principe de la démonstration, pour simplifier, dans le cas  $h = 2$ . Nous avons :

$$(9) \quad (\omega_{k,l}(n))^2 = \omega_{k,l}(n) + 2 \sum_{P_2/n} 1,$$

où  $p_2$  décrit les entiers décomposables en produit de deux facteurs premiers distincts et  $\equiv l \pmod{k}$ . Comme on connaît le développement asymptotique<sup>8)</sup> de  $\sum_{p_2 \leq x} 1$ , la démonstration s'achève par la méthode de l'hyperbole, grâce à la relation (9), de manière analogue au théorème 1.

b) Il est clair que les théorèmes asymptotiques 1 à 4 s'étendent à une large classe de fonctions fortement additives<sup>9)</sup> : c'est le cas pour toutes les fonctions totalement additives  $f(n)$  pour lesquelles il existe une fonction réelle  $\theta(x)$  « suffisamment dérivable » (par exemple de classe  $C^1$ ) et « suffisamment régulière » (par exemple  $\theta(x) = x^\lambda$ ,  $\lambda > 0$ ;  $\theta(x) = (\log x)^\lambda$ ,  $\lambda > 0$ ) telle que  $f(p) = \theta(p) \chi_{k,l}(p)$ , où  $\chi_{k,l}$  est la fonction caractéristique des nombres premiers  $\equiv l \pmod{k}$ . On peut alors calculer les développements de  $\sum_{1 \leq n \leq x} (f(n))^h$ ,  $h$  entier  $\geq 1$ .

Par exemple, si  $S_\lambda(n)$  est la somme des puissances  $\lambda$ èmes des diviseurs premiers de  $n$  ( $\lambda > 0$ ), nous pouvons trouver une suite de constantes  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \dots$  ne dépendant que de  $\lambda$  et telles que, lorsque  $x \rightarrow +\infty$ , on ait pour tout entier  $m \geq 2$  :

$$\sum_{1 \leq n \leq x} S_\lambda(n) = \frac{\zeta(\lambda+1)}{\lambda+1} \cdot \frac{x^{\lambda+1}}{\log x} + \sum_{r=2}^m \alpha_r \frac{x^{\lambda+1}}{(\log x)^r} + O \left[ \frac{x^{\lambda+1}}{(\log x)^{m+1}} \right].$$

### III. SUR UN THÉORÈME DE RÉNYI ET DELANGE

1. Soient  $\omega(n)$  le nombre des diviseurs premiers distincts de l'entier positif  $n$ , et  $\Omega(n)$  le nombre total des facteurs dans la décomposition de  $n$  en facteurs premiers. Autrement dit, si  $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ , où les  $p_i$  sont

8) Cf. [11].

9) Une fonction arithmétique additive est dite fortement additive si  $f(p^m) = f(p)$  pour tous  $p$  premier et  $m$  entier  $\geq 1$ .

des nombres premiers distincts deux à deux et les  $\alpha_i$  des entiers  $\geq 1$ , alors  $\omega(n) = r$  et  $\Omega(n) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r$ . On a donc  $\Omega(n) \geq \omega(n)$ , l'égalité n'ayant lieu que pour les entiers « quadratfrei ».

A. Rényi [5] a montré que, pour tout entier  $m \geq 0$ , l'ensemble des entiers  $n$  pour lesquels  $\Omega(n) - \omega(n) = m$  possède une densité  $d_m$  (c.à.d. que, si  $v_m(x)$  est le nombre des  $n \leq x$  tels que  $\Omega(n) - \omega(n) = m$ , alors pour  $x \rightarrow +\infty$  on a :

$$v_m(x) = d_m x + o(x)$$

H. Delange [6] a précisé ce résultat de la façon suivante :

THÉORÈME A. *Le fait que la fonction  $\xi(s)$  de Riemann n'a aucun zéro de partie réelle égale à 1 implique que, lorsque  $x \rightarrow +\infty$  :*

$$v_m(x) = d_m x + o\left[\sqrt{x}(\log \log x)^m\right]$$

Dans un second article, H. Delange [7] a amélioré le résultat précédent de la façon suivante :

THÉORÈME B. *Le fait que la fonction  $\mu(n)$  de Möbius satisfait à :*

$$\sum_{1 \leq n \leq x} \mu(n) = O\left[x e^{-\alpha \sqrt{\log x}}\right] \quad (\alpha > 0)$$

*implique que, lorsque  $x \rightarrow +\infty$  :*

$$v_m(x) = d_m x + O\left[\frac{x^{\frac{1}{2}} (\log \log x)^{m-1}}{\log x}\right],$$

Nous nous proposons, dans ce qui suit, d'améliorer ce dernier résultat de Delange, en donnant un développement asymptotique de la différence  $v_m(x) - d_m x$ , et même mieux : nous nous sommes en effet aperçu que, grâce à une astuce simple, on peut transformer l'expression de  $v_m(x)$  de façon à le rendre calculable par la méthode de l'hyperbole. Nous montrerons également, en appendice, comment notre méthode permet de retrouver de façon simple le résultat de Rényi et le théorème A de Delange.

## 2. Etude du cas $m = 1$ .

En raison de la grande difficulté technique, nous traitons d'abord le cas  $m = 1$ , pour traiter ensuite le cas  $m \geq 2$  de façon plus sommaire <sup>10</sup>).

10) Le cas  $m = 0$  est le cas bien connu des « quadratfrei ». Alors  $d_0 = \frac{6}{\pi^2}$ , et  $v_0(x) = Q(x) = \frac{6}{\pi^2} x + O\left[\sqrt{x} \exp(-C(\log x)^\alpha (\log \log x)^\beta)\right]$ , où  $C > 0$  et  $\alpha > 0$ . L'hypothèse de Riemann donne un reste bien meilleur :  $O\left[x^{\frac{2}{5} + \varepsilon}\right]$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ .

THÉORÈME 5. Pour tout entier  $k \geq 2$  nous avons, lorsque  $x \rightarrow +\infty$  :

$$v_1(x) = d_1 x + \sum_{j=2}^k A_j \frac{x^{\frac{1}{2}}}{(\log x)^j} + O \left[ \frac{x^2}{(\log x)^{k+1}} \right],$$

où la suite des constantes  $A_2, A_3, \dots, A_k, \dots$  est définie par :

$$A_j = (-1)^{j-1} \frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}} \left( \frac{\zeta(s)}{s\zeta(2s)} \right)_{s=\frac{1}{2}}$$

Le théorème 5 est une conséquence du résultat plus précis suivant :

THÉORÈME 6. Soit  $\pi(t)$  le nombre de nombres premiers  $\leq t$ , et soient  $C, \alpha, \beta$  trois constantes ( $C > 0, \alpha > 0$ ) telles que, lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , on ait :

$$\pi(t) = \text{li}(t) + O \left[ t \exp(-C(\log t)^\alpha (\log \log t)^\beta) \right].$$

Soit  $Q(t)$  le nombre d'entiers « quadratifrei »  $\leq t$ , et soit  $R(t) = Q(t) - \frac{6}{\pi^2} t$ . Alors, lorsque  $x \rightarrow +\infty$ , nous avons :

$$v_1(x) = d_1 x - \frac{6}{\pi^2} x \int_x^{+\infty} \frac{t^{-\frac{3}{2}}}{\log t} dt + x^{\frac{1}{2}} \int_1^{\exp[C'(\log x)^\alpha]} \frac{t^{-\frac{2}{3}} R(t)}{\log x - \log t} dt + O \left[ x^{\frac{1}{2}} \exp(-C'(\log x)^{\alpha'} (\log \log x)^{\beta'}) \right],$$

où  $C', \alpha', \beta'$  sont des constantes, avec  $C' > 0$  et  $\alpha' > 0$  [on peut prendre  $\alpha' = \alpha^2$  et  $\beta' = 2\alpha\beta$ ]

En admettant l'hypothèse de Riemann, on peut considérablement améliorer le terme-erreur du théorème 6, le remplaçant par  $O \left[ x^{\frac{8}{17} + \varepsilon} \right]$ , grâce au :

THÉORÈME 7. Moyennant l'hypothèse de Riemann, nous avons pour  $x \rightarrow +\infty$  :

$$v_1(x) = d_1 x - \frac{6}{\pi^2} x \int_x^{+\infty} \frac{t^{-\frac{3}{2}} - t^{-\frac{5}{3}}}{\log t} dt + x^{\frac{1}{2}} \int_1^{x^{\frac{5}{17}}} \frac{t^{-\frac{3}{2}} R(t)}{\log x - \log t} dt -$$

$$- x^{\frac{1}{3}} \int_1^{x^{\frac{5}{17}}} \frac{t^{-\frac{4}{3}} R(t)}{\log x - \log t} dt + O \left[ x^{\frac{8}{17}} \exp \left( K \frac{\log x}{\log \log x} \right) \right],$$

où  $K$  est une constante absolue  $> 0$ .

DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES 5 A 7.

a) *Calcul préparatoire.* Dans toute la suite, la lettre  $q$  désignera exclusivement les entiers « quadratfrei ». Les entiers  $n$  tels que  $\Omega(n) - \omega(n) = 1$  sont ceux dont la décomposition en facteurs premiers comporte un seul exposant égal à 2, tous les autres exposants étant égaux à 1. Autrement dit, nous avons  $\Omega(n) - \omega(n) = 1$  si et seulement si  $n = p^2 q$ , avec  $p \nmid q$ . Par suite:

$$\begin{aligned} v_1(x) &= \sum_{\substack{p^2 q \leq x \\ p \nmid q}} 1 = \sum_{p^2 q \leq x} 1 - \sum_{\substack{p^2 q \leq x \\ p|q}} 1 = \sum_{p^2 q \leq x} 1 - \sum_{\substack{p^3 q \leq x \\ p \nmid q}} 1 = \\ &= \sum_{p^2 q \leq x} 1 - \sum_{p^3 q \leq x} 1 + \sum_{\substack{p^3 q \leq x \\ p|q}} 1 = \sum_{p^2 q \leq x} 1 - \sum_{p^3 q \leq x} 1 + \sum_{\substack{p^4 q \leq x \\ p \nmid q}} 1 = \dots = \\ &= \sum_{r \geq 2} (-1)^r \sum_{p^r q \leq x} 1. \end{aligned}$$

Il est clair que la dernière expression obtenue est une somme finie, car nous avons  $\sum_{p^r q \leq x} 1 = 0$  dès que  $r > \frac{\log x}{\log 2}$ . En définitive nous avons:

$$(10) \quad v_1(x) = \sum_{r \geq 2} (-1)^r V_r(x), \quad \text{avec } V_r(x) = \sum_{\substack{p, q \\ p^r q \leq x}} 1.$$

b) *Démonstration des théorèmes 6 et 7.* Puisque  $V_r(x)$  est la fonction sommatoire du produit de convolution de la fonction caractéristique de l'ensemble des « quadratfrei » par la fonction caractéristique des puissances  $r^{\text{ièmes}}$  des nombres premiers, nous pouvons calculer  $V_r(x)$  par la méthode de l'hyperbole. Cependant dans le cas présent, et pour des raisons de commodité dans la rédaction, nous procéderons d'une manière légèrement différente. D'après la relation (10),  $v_1(x)$  est la fonction sommatoire du produit de convolution de la fonction caractéristique de l'ensemble des « quadratfrei » par la fonction arithmétique valant  $(-1)^r$  si  $n = p^r$  (où  $r \geq 2$ ), et zéro si  $n$  n'est pas de cette forme. Posant:

$$\pi^*(x) = \sum_{\substack{p^r \leq x \\ r \geq 2}} (-1)^r = \text{li}(\sqrt{x}) + \eta^*(x),$$

nous obtenons par application de la méthode de l'hyperbole, avec  $1 < \xi < x$ :

$$(11) \quad v_1(x) = \sum_{\substack{p^r \leq \xi \\ r \geq 2}} Q\left(\frac{x}{p^r}\right) (-1)^r + \sum_{q \leq \frac{x}{\xi}} \pi^*\left(\frac{x}{q}\right) - \pi^*(\xi) Q\left(\frac{x}{\xi}\right)$$

Nous avons d'abord:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p^r \leq \xi \\ r \geq 2}} Q\left(\frac{x}{p^r}\right) (-1)^r &= \frac{6x}{\pi^2} \sum_{\substack{p^r \leq \xi \\ r \geq 2}} (-1)^r p^r + \sum_{\substack{p^r \leq \xi \\ r \geq 2}} R\left(\frac{x}{p^r}\right) (-1)^r = \\ &= \frac{6x}{\pi^2} \sum_p \frac{1}{p(p+1)} - \frac{6x}{\pi^2} \int_{\xi}^{+\infty} \frac{d\pi^*(t)}{t} + \sum_{\substack{p^r \leq \xi \\ r \geq 2}} (-1)^r R\left(\frac{x}{p^r}\right). \end{aligned}$$

En effectuant, de la même manière que dans les démonstrations des théorèmes 1 à 3, deux intégrations par parties successives sur l'intégrale  $\int_{\xi}^{+\infty} t^{-1} d\pi^*(t)$ , nous obtenons:

$$(12) \quad \begin{aligned} \sum_{\substack{p^r \leq \xi \\ r \geq 2}} Q\left(\frac{x}{p^r}\right) (-1)^r &= \frac{6x}{\pi^2} \sum_p \frac{1}{p(p+1)} + \sum_{\substack{p^r \leq \xi \\ r \geq 2}} (-1)^r R\left(\frac{x}{p^r}\right) - \\ &- \frac{6x}{\pi^2} \int_{\xi}^{+\infty} \frac{t^{-\frac{3}{2}}}{\log t} dt + \frac{6x}{\pi^2} \frac{\eta^*(\xi)}{\xi} - \frac{6x}{\pi^2} \int_{\xi}^{+\infty} \frac{\eta^*(t)}{t^2} dt \end{aligned}$$

De la même manière nous obtenons, avec  $a$  quelconque tel que  $0 < a < 1$ :

$$(13) \quad \begin{aligned} \sum_{q \leq \frac{x}{\xi}} \pi^*\left(\frac{x}{q}\right) &= \sum_{q \leq \frac{x}{\xi}} \eta^*\left(\frac{x}{q}\right) + \int_a^{\frac{x}{\xi}} \text{li}\left(\sqrt{\frac{x}{t}}\right) dQ(t) = \frac{6x}{\pi^2} \cdot \frac{\text{li}(\sqrt{\xi})}{\xi} + \\ &+ \text{li}(\sqrt{\xi}) R\left(\frac{x}{\xi}\right) + \sum_{q \leq \frac{x}{\xi}} \eta^*\left(\frac{x}{q}\right) + \frac{6x}{\pi^2} \int_{\xi}^{\frac{x}{a}} \frac{t^{-\frac{3}{2}}}{\log t} dt + \sqrt{x} \int_a^{\frac{x}{\xi}} \frac{t^{-\frac{3}{2}} R(t)}{\log x - \log t} dt \end{aligned}$$

Il résulte de la relation (13) que la somme des deux derniers termes du dernier membre de (13) ne dépend pas de  $a$  ( $0 < a < 1$ ): par conséquent la relation (13) reste vraie avec  $a = 1$ .

Enfin, il est clair que:

$$(14) \quad -\pi^*(\xi) Q\left(\frac{x}{\xi}\right) = -\frac{6x}{\pi^2} \cdot \frac{\text{li}(\sqrt{\xi})}{\xi} - \frac{6x}{\pi^2} \frac{\eta^*(\xi)}{\xi} - \\ - R\left(\frac{x}{\xi}\right) \text{li}(\sqrt{\xi}) - R\left(\frac{x}{\xi}\right) \eta^*(\xi).$$

D'après (11), nous obtenons par addition des relations (12), (13) [avec  $a = 1$ ] et (14):

$$(15) \quad v_1(x) = \frac{6x}{\pi^2} \sum_p \frac{1}{p(p+1)} - \frac{6x}{\pi^2} \int_x^{+\infty} \frac{t^{-\frac{3}{2}}}{\log t} dt + \sqrt{x} \int_1^{\frac{x}{\xi}} \frac{t^{-\frac{3}{2}} R(t)}{\log x - \log t} dt - \\ - \frac{6x}{\pi^2} \int_{\xi}^{+\infty} \frac{\eta^*(t)}{t^2} dt + \sum_{\substack{\rho^r \leq \xi \\ r \geq 2}} (-1)^r R\left(\frac{x}{\rho^r}\right) + \sum_{q \leq \frac{x}{\xi}} \eta^*\left(\frac{x}{q}\right) - R\left(\frac{x}{\xi}\right) \eta^*(\xi).$$

De la même manière que nous avons obtenu le théorème 2 à partir de la relation (4), nous obtenons le théorème 6 à partir de la relation (15) en prenant, avec une constante convenable  $C' > 0$ :

$$\xi = x \exp[-C'(\log x)^\alpha],$$

et en remarquant que la formule:

$$\pi(t) = \text{li}(t) + O[t \exp(-C(\log t)^\alpha (\log \log t)^\beta)]$$

a pour conséquence les relations:

$$\eta^*(t) = O[\sqrt{t} \exp(-C''(\log t)^\alpha (\log \log t)^\beta)]$$

et

$$R(t) = O[\sqrt{t} \exp(-C'''(\log t)^\alpha (\log \log t)^\beta)]$$

où  $C''$  et  $C'''$  sont des constantes convenables  $> 0$ .

L'hypothèse de Riemann, qui est équivalente à la relation  $\eta^*(t) = \text{li}(\sqrt[3]{t}) + O(t^{\frac{1}{4}} \log t)$  implique en outre <sup>11)</sup>:

$$R(t) = O\left[t^{\frac{2}{5}} \exp\left(K' \frac{\log x}{\log \log x}\right)\right]; K' \text{ constante } > 0.$$

11) Cf. [16].

Dans ce cas, un calcul élémentaire fait d'après la relation (15) montre que le meilleur choix de  $\xi$  est  $\xi = x^{\frac{12}{17}}$ , et le théorème 7 découle alors des relations (10) et (15) et des estimations de  $\eta(t)$  et de  $R(t)$ .

c) *Démonstration du théorème 5.* Le théorème 5 s'obtient à partir du théorème 6 de la même manière que nous avons obtenu le théorème 1 à partir du théorème 2. En effet, on peut développer suivant les puissances de  $\frac{1}{\log x}$  les deuxième et troisième termes du second membre de la relation donnant  $v_1(x)$  [dans l'énoncé du théorème 6], et nous obtenons immédiatement, pour tout  $k \geq 1$ :

$$v_1(x) = d_1 x + \sum_{j=1}^k A_j \frac{x^{\frac{1}{2}}}{(\log x)^j} + O \left[ \frac{x^{\frac{1}{2}}}{(\log x)^{k+1}} \right],$$

avec:

$$(16) \quad A_j = \frac{6}{\pi^2} (j-1)! (-1)^j 2^j + \int_1^{+\infty} t^{-\frac{3}{2}} (\log t)^{j-1} R(t) dt.$$

Nous pouvons dès à présent remarquer que  $A_1 = 0$ ,  $A_2 \neq 0$ . En effet nous avons (cf. [7]):

$$\int_0^x (v_m(t) - d_m t) dt \sim -\frac{8}{3} \zeta \left( \frac{1}{2} \right) \frac{1}{(m-1)!} \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}} (\log \log x)^{m-1}}{(\log x)^2}$$

Il en résulte ici:

$$A_1 = 0 \text{ et } A_2 = -4 \zeta \left( \frac{1}{2} \right).$$

Nous allons donner, pour les  $A_j$ , une expression plus simple <sup>12)</sup> que celle de la relation (16):

Pour  $s$  complexe,  $\Re(s) > 1$ , nous avons:

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^s} = \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{dQ(t)}{t^s} = s \int_1^{+\infty} \frac{Q(t)}{t^{s+1}} dt$$

12) En août 1968, nous avons démontré le développement asymptotique [les  $A_j$  étant donnés par la relation (16)] et fait le calcul effectif de  $A_1$  et de  $A_2$ . M. H. Delange a bien voulu nous indiquer que les  $A_j$  donnés par la relation (16) prenaient en fait la forme plus simple de la relation (17).



donc, pour  $\Re(s) > 1$ :

$$\int_1^{+\infty} \frac{R(t)}{t^{s+1}} dt = \frac{\zeta(s)}{s \zeta(2s)} - \frac{6}{\pi^2} \frac{1}{s-1}$$

L'intégrale étant absolument convergente pour  $\Re(s) \geq \frac{1}{2}$ , l'égalité ci-dessus a lieu pour  $\Re(s) \geq \frac{1}{2}$ . On voit ainsi que:

$$\int_1^{+\infty} t^{-\frac{3}{2}} (\log t)^r R(t) dt = (-1)^r F^{(r)}\left(\frac{1}{2}\right)$$

avec

$$F(s) = \frac{\zeta(s)}{s \zeta(2s)} - \frac{6}{\pi^2} \cdot \frac{1}{s-1}$$

En définitive:

$$(17) \quad A_j = (-1)^{j-1} \frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}} \left( \frac{\zeta(s)}{s \zeta(2s)} \right)_{s = \frac{1}{2}}$$

Ainsi

$$A_1 = 2 \frac{\zeta\left(\frac{1}{2}\right)}{\zeta(1)} = 0, \text{ et } A_2 = - \lim_{s \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\zeta(s)}{(s - \frac{1}{2}) s \zeta(2s)} = -4 \zeta\left(\frac{1}{2}\right)$$

### 3. Etude du cas $m \geq 2$ .

Au prix de difficultés techniques énormes, notre méthode permet de trouver, pour la différence  $v_m(x) - d_m x$ , un développement asymptotique (analogue au théorème 5), ainsi que des formes plus précises (analogues aux théorèmes 6 et 7). Signalons seulement le développement asymptotique <sup>13</sup>):

**THÉORÈME 8.** *Il existe dans  $\mathbf{R}[X]$  une suite de polynômes  $P_2, P_3, \dots, P_k, \dots$  de degré  $m-1$ , tels que, pour tout entier  $k \geq 2$  on ait lorsque  $x \rightarrow +\infty$ :*

$$v_m(x) = d_m x + \sum_{j=2}^k \frac{P_j(\log \log x)}{(\log x)^j} + O\left[\frac{(\log \log x)^{m-1}}{(\log x)^{k+1}}\right]$$

13) Pour plus de détails sur ce développement asymptotique, cf. [10].

Indiquons le principe de la démonstration: il s'agit d'établir, dans le cas général  $m \geq 1$ , des résultats analogues à la relation (10). Posons, pour tous entiers  $r_1 \geq 2, r_2 \geq 1$ :

$$V_{r_1, r_2}(x) = \sum_{\substack{p^{r_1} p'^{r_2} q \leq x \\ p \neq p'}} 1.$$

Posons de même, pour tous entiers  $r_1 \geq 2, r_2 \geq 2, r_3 \geq 2$ :

$$V_{r_1, r_2, r_3}(x) = \sum_{\substack{p^{r_1} p'^{r_2} p''^{r_3} q \leq x \\ p \neq p' \neq p'' \neq p}} 1$$

Les seuls entiers  $n$  tels que  $\Omega(n) - \omega(n) = 2$  sont ceux de la forme  $n = p^3 q, p \nmid q$ , ou bien  $n = p^2 p'^2 q, p \neq p', p \nmid q, p' \nmid q$ .

Les seuls entiers  $n$  tels que  $\Omega(n) - \omega(n) = 3$  sont ceux de la forme  $n = p^4 q, p \nmid q$ , ou bien  $n = p^3 p'^2 q, p \neq p', p \nmid q, p' \nmid q$ , ou bien  $n = p^2 p'^2 p''^2 q, p \neq p' \neq p'' \neq p, p \nmid q, p' \nmid q, p'' \nmid q$ .

On obtient alors, par la même méthode qui a servi à démontrer la relation (10):

$$v_2(x) = \sum_{r \geq 3} (-1)^{r+1} V_r(x) + \sum_{r_1 \geq 2, r_2 \geq 2} (-1)^{r_1+r_2} V_{r_1, r_2}(x),$$

$$v_3(x) = \sum_{r \geq 4} (-1)^r V_r(x) + \sum_{r_1 \geq 3, r_2 \geq 2} (-1)^{r_1+r_2+1} V_{r_1, r_2}(x) + \\ + \sum_{r_1 \geq 2, r_2 \geq 2, r_3 \geq 2} (-1)^{r_1+r_2+r_3} V_{r_1, r_2, r_3}(x),$$

et des formules analogues dans le cas  $m \geq 4$ .

Puisqu'on connaît la répartition asymptotique des entiers dont le nombre de facteurs premiers est donné (cf. [11]), il en résulte que chacune des quantités  $V_r(x), V_{r_1, r_2}(x), V_{r_1, r_2, r_3}(x)$  est calculable par la méthode de l'hyperbole, et le calcul se poursuit exactement comme dans la démonstration des théorèmes 5 à 7.

#### 4. Remarques.

a) Notre méthode s'applique à des fonctions arithmétiques plus générales que  $\Omega(n) - \omega(n)$ : soit  $f(n)$  une fonction arithmétique additive et « prime-independant », c'est-à-dire que si  $p$  et  $p'$  sont premiers et  $\alpha$  est entier  $\geq 0$ , alors  $f(p^\alpha) = f(p'^\alpha)$ . Supposons de plus que la fonction  $f(p^\alpha)$  [de la variable  $\alpha$ ] soit non-décroissante, à valeurs entières  $\geq 0$ , et s'annule pour  $\alpha = 1$ . Alors nous pourrons donner, pour le nombre  $v_m(x)$  des entiers  $n \leq x$  tels que  $f(n) = m$  un développement asymptotique analogue à celui

du théorème 8, la différence  $v_r(x) - d_r x$  étant ainsi équivalente au produit d'une constante par  $x^{\frac{1}{r+1}} (\log x)^{-2}$ , où  $r$  est le plus grand entier  $\alpha$  tel que  $f(p^\alpha) = 0$ .

b) La démonstration du développement asymptotique mentionné ci-dessus, et a fortiori ceux des théorèmes 5 et 8 (et, pareillement, ceux des théorèmes 1 et 4), peut se faire en n'utilisant le théorème des nombres premiers que sous sa forme asymptotique, c'est-à-dire :

$$\pi(x) = \sum_{r=1}^k (r-1)! \frac{x}{(\log x)^r} + O\left[\frac{x}{(\log x)^{k+1}}\right].$$

#### IV. MÉTHODE ANALYTIQUE

La méthode de l'hyperbole, parce qu'elle est élémentaire, a une efficacité limitée (la rédaction complète de la démonstration du théorème 8, faisable pour  $m = 2$ , devient horrible pour  $m \geq 3$ ).

H. Delange, par des méthodes analytiques, retrouve tous les résultats contenus dans cet article de façon plus rapide et plus générale, et va beaucoup plus loin. Trois articles à ce sujet [8], [9] et [10] sont à paraître en 1970 dans *Acta Arithmetica*.

#### APPENDICE

Nous montrons ici comment on peut retrouver, de façon élémentaire, le résultat de Renyi (et même un peu mieux) et le théorème A de Delange.

THÉORÈME. Notons toujours par  $v_m(x)$  le nombre des  $n \leq x$  tels que  $\Omega(n) - \omega(n) = m$ . Alors :

a) Sans utiliser aucune estimation de  $\pi(x)$  [autre que l'estimation banale  $\pi(x) = O(x)$ ], nous avons :

$$v_m(x) = d_m x + O(\sqrt{x} \log x).$$

b) L'estimation de Tchebicheff  $\pi(x) = O\left(\frac{x}{\log x}\right)$  implique :

$$v_m(x) = d_m x + O(\sqrt{x} (\log \log x)^m)$$

c) Le théorème des nombres premiers  $\left[ \pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \right]$  implique :

$$v_m(x) = d_m x + o(\sqrt{x} (\log \log x)^{m-1}).$$

*Démonstration :*

a) Reprenons les expressions  $V_r(x), V_{r_1, r_2}(x), V_{r_1, r_2, r_3}(x), \dots$  définies précédemment. Compte tenu de la relation  $Q(x) = \frac{6}{\pi^2} x + O(\sqrt{x})$  [dont la démonstration ne fait appel à aucune estimation de  $\pi(x)$ ], nous avons :

$$\begin{aligned} V_{r_1, r_2, \dots, r_k}(x) &= \frac{6}{\pi^2} x \sum_p p^{-(r_1+r_2+\dots+r_k)} + O\left(x \sum_{l > \sqrt{x}} l^{-2}\right) + O\left(\sqrt{x} \sum_{l \leq \sqrt{x}} \frac{1}{l}\right) \\ &= \text{constante } x + O(\sqrt{x} \log x). \end{aligned}$$

En utilisant alors la relation (10) et ses analogues [rencontrés au cours de la démonstration du théorème 8], on obtient par addition

$$v_m(x) = d_m x + O(\sqrt{x} \log x).$$

b) L'estimation de Tchebicheff  $\pi(x) = O\left(\frac{x}{\log x}\right)$  implique :

$$\sum_{\substack{1 \leq l \leq x \\ \omega(l) \leq k}} 1 = O\left(\frac{x}{\log x} (\log \log x)^{k-1}\right)$$

Nous obtenons donc cette fois :

$$\begin{aligned} V_{r_1, r_2, \dots, r_k}(x) &= \text{constante } x + O\left[x \sum_{\substack{l > \sqrt{x} \\ \omega(l) \leq k}} l^{-2}\right] + O\left[\sqrt{x} \sum_{\substack{l \leq \sqrt{x} \\ \omega(l) \leq k}} \frac{1}{l}\right] = \\ &= \text{constante } x + O[\sqrt{x} (\log \log x)^k] \end{aligned}$$

En utilisant alors la relation (10) et ses analogues, on obtient donc :

$$v_m(x) = d_m x + O(\sqrt{x} (\log \log x)^m).$$

c) Le théorème des nombres premiers  $\left[ \pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \right]$  implique :

$$\sum_{\substack{1 \leq l \leq x \\ \omega(l) \leq k}} 1 \sim \sum_{\substack{1 \leq l \leq x \\ \Omega(l) = k}} 1 \sim \frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{x}{\log x} (\log \log x)^{k-1}.$$

La relation  $v_m(x) = d_m x + o(\sqrt{x} (\log \log x)^m)$  (s'obtient alors de façon analogue à b), en remarquant que cette fois :  $Q(x) = \frac{6}{\pi^2} x + o(\sqrt{x})$ .

RÉFÉRENCES

- [1] DIRICHLET, *Werke*, II, pp. 49-66.
- [2] TSUNG-TAO-CHIH, *The Dirichlet's divisor problem*, The Science Report of Tsing Hua University 5 (1950), pp. 402-427.
- [3] YIN-WEN-LIN, *On Dirichlet's divisor problem*, Science Report (N.S.) 3 (1959), pp. 6-8.
- [4] RAMANUJAN, *Collected papers*, Chelsea, Edition 1962, p. 263 et p. 347.
- [5] RENYI, A., *On the density of certain sequences of integers*, publications de l'Institut de Mathématiques de l'Académie Serbe des Sciences 8 (1955), pp. 157-162.
- [6] DELANGE, H., Sur un théorème de Rényi, *Acta Arithmetica* 11 (1965), pp. 241-252.
- [7] — Sur un théorème de Rényi II, *Acta Arithmetica* 13 (1968), pp. 339-362.
- [8] — Sur certaines fonctions additives à valeurs entières, *Acta Arithmetica* (1970) [à paraître].
- [9] — sur des formules de ATLE SELBERG, *Acta Arithmetica* (1970) [à paraître].
- [10] — Sur un théorème de Rényi, III, *Acta Arithmetica* (1970) [à paraître].
- [11] LANDAU, E., *Nachr. Ges. Wiss, Göttingen* (1911), pp. 361-381,
- [12] RADEMACHER, H., *Lectures on elementary Number theory*, Blaisdell, 1964, p. 100,
- [13] HARDY, G. H. et E. M. WRIGHT, *Introduction to the theory of numbers*, Oxford. chap. XVIII.
- [14] LANDAU, E., *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Zweiter Band, p. 46.
- [15] WALFISZ, A. Z., *Weylsche Exponentialsummen in der neueren Zahlentheorie*, chap. V (VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1963).
- [16] AXER, *Sitzungsber. Akad. Wien* (2a) vol. 120 (1911), pp. 1253-1298.

(Manuscrit reçu le 30 avril 1969)

Bahman Saffari  
1, place Corneille  
92 Boulogne  
FRANCE