I. Introduction

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **14 (1968)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

SUR QUELQUES APPLICATIONS DE LA « MÉTHODE DE L'HYPERBOLE » DE DIRICHLET A LA THÉORIE DES NOMBRES PREMIERS

Bahman SAFFARI

I. INTRODUCTION

1. La « méthode de l'hyperbole » que nous exposons ci-après sur quelques exemples est une méthode élémentaire donnant de bons résultats dans les théorèmes asymptotiques. Certaines questions de théorie des nombres se ramènent au problème suivant: donner une évaluation asymptotique, lorsque $x \to +\infty$, de $F(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} f(n)$, où f est le « produit de convolution » de deux fonctions arithmétiques [1]) g et h, définie par:

$$f(n) = (g*h)(n) = \sum_{k \mid n} g(k)\, h\left(\frac{n}{k}\right).$$

Connaissant $G(x) = \sum_{1 \leq k \leq x} g(k)$ et $H(x) = \sum_{1 \leq l \leq x} h(l)$, on peut évaluer $F(x)$ grâce à:

$$F(x) = \sum_{1 \leq k \leq x} g(k)\, H\left(\frac{x}{k}\right) = \sum_{1 \leq l \leq x} h(l)\, G\left(\frac{x}{l}\right). \tag{1}$$

Les résultats que l'on obtient par application de (1) sont au plus aussi bons que ceux obtenus par le procédé suivant (méthode de l'hyperbole):
Pour tout ξ tel que $1 \leqq \xi \leqq x$, on a:

$$F(x) = \sum_{1 \leq k \leq \xi} g(k)\, H\left(\frac{x}{k}\right) + \sum_{1 \leq l \leq \frac{x}{\xi}} h(l)\, G\left(\frac{x}{l}\right) - G(\xi)\, H\left(\frac{x}{\xi}\right). \tag{2}$$

Chacun des trois termes du second membre de (2) fournit un terme-erreur, le terme-erreur global résultant alors de l'addition de ces trois termes-erreurs. On choisit ξ de manière que le terme-erreur global devienne le meilleur possible. Le nom de la « méthode de l'hyperbole » vient de ce que $F(x)$ est la somme des $g(k)\, h(l)$ où (k, l) décrit les points à coordonnées

1) Par « fonction arithmétique » nous entendons ici une fonction à valeurs réelles ou complexes, et définie sur les entiers ≥ 1.

entières > 0 en dessous de l'hyperbole d'équation $uv = x$, et que la formule (2) constitue, pour le calcul de cette somme, un procédé dont la signification géométrique est évidente.

2. Le premier exemple historique (Dirichlet [1]) est celui du cas $g(n) = h(n) = 1$. Alors $f(n) = d(n) =$ nombre des diviseurs de n. Il est alors bien connu [2]) que la formule (1) donne:

$$\sum_{1 \leqq n \leqq x} d(n) = x \log x + O(x),$$

tandis que la méthode de l'hyperbole donne, avec $\xi = \sqrt{x}$:

$$\sum_{1 \leqq n \leqq x} d(n) = x \log x + (2\gamma - 1)x + O\left(x^{\frac{1}{2}}\right), \tag{3}$$

γ désignant la constante d'Euler.

Cependant on démontre, par des méthodes analytiques, qu'en fait le terme-erreur de (3) est $O(x^c)$, pour une constante convenable $c < \frac{1}{3}$ (cf. par exemple [2] et [3]).

3. Nous démontrons ci-dessous, par la méthode de l'hyperbole, certains résultats nouveaux, que l'on ne peut guère rendre plus précis par des méthodes analytiques (cependant voir ci-dessous IV).

II. Sur un théoreme de Hardy et Ramanujan

1. Soit $\omega(n)$ le nombre des diviseurs premiers distincts de l'entier positif n. Hardy et Ramanujan [4] ont prouvé que, lorsque $x \to +\infty$:

$$\sum_{1 \leqq n \leqq x} \omega(n) = x \log \log x + Bx + O\left(\frac{x}{\log x}\right),$$

où B est une constante $\left[B = \gamma + \sum_p \left(\log\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p}\right)\right.$, la sommation étant étendue à tous les p premiers [3])]. De plus, Hardy et Ramanujan ([4], p. 347) annoncent que ce théorème asymptotique peut être amélioré « par des méthodes transcendantes ». Cependant, à notre connaissance, aucune telle amélioration n'a été publiée à ce jour.

Nous démontrons ici:

---

2) Voir par exemple [12] ou [13].

3) Dans tout cet article, les lettres p, p', p'', ... désigneront exclusivement des nombres premiers; la lettre q désignera exclusivement les entiers « quadratfrei ».