

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 14 (1968)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR QUELQUES APPLICATIONS DE LA «MÉTHODE DE L'HYPERBOLE» DE DIRICHLET A LA THÉORIE DES NOMBRES PREMIERS  
**Autor:** Saffari, Bahman  
**Kapitel:** I. Introduction  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-42352>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SUR QUELQUES APPLICATIONS DE LA « MÉTHODE DE L'HYPERBOLE » DE DIRICHLET A LA THÉORIE DES NOMBRES PREMIERS

Bahman SAFFARI

## I. INTRODUCTION

1. La « méthode de l'hyperbole » que nous exposons ci-après sur quelques exemples est une méthode élémentaire donnant de bons résultats dans les théorèmes asymptotiques. Certaines questions de théorie des nombres se ramènent au problème suivant: donner une évaluation asymptotique, lorsque  $x \rightarrow +\infty$ , de  $F(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} f(n)$ , où  $f$  est le « produit de convolution » de deux fonctions arithmétiques <sup>1)</sup>  $g$  et  $h$ , définie par:

$$f(n) = (g * h)(n) = \sum_{k|n} g(k) h\left(\frac{n}{k}\right).$$

Connaissant  $G(x) = \sum_{1 \leq k \leq x} g(k)$  et  $H(x) = \sum_{1 \leq l \leq x} h(l)$ , on peut évaluer  $F(x)$  grâce à:

$$(1) \quad F(x) = \sum_{1 \leq k \leq x} g(k) H\left(\frac{x}{k}\right) = \sum_{1 \leq l \leq x} h(l) G\left(\frac{x}{l}\right).$$

Les résultats que l'on obtient par application de (1) sont au plus aussi bons que ceux obtenus par le procédé suivant (méthode de l'hyperbole):

Pour tout  $\xi$  tel que  $1 \leq \xi \leq x$ , on a:

$$(2) \quad F(x) = \sum_{1 \leq k \leq \xi} g(k) H\left(\frac{x}{k}\right) + \sum_{1 \leq l \leq \frac{x}{\xi}} h(l) G\left(\frac{x}{l}\right) - G(\xi) H\left(\frac{x}{\xi}\right).$$

Chacun des trois termes du second membre de (2) fournit un terme-erreur, le terme-erreur global résultant alors de l'addition de ces trois termes-erreurs. On choisit  $\xi$  de manière que le terme-erreur global devienne le meilleur possible. Le nom de la « méthode de l'hyperbole » vient de ce que  $F(x)$  est la somme des  $g(k)h(l)$  où  $(k, l)$  décrit les points à coordonnées

1) Par « fonction arithmétique » nous entendons ici une fonction à valeurs réelles ou complexes, et définie sur les entiers  $\geq 1$ .

entières  $> 0$  en dessous de l'hyperbole d'équation  $uv = x$ , et que la formule (2) constitue, pour le calcul de cette somme, un procédé dont la signification géométrique est évidente.

2. Le premier exemple historique (Dirichlet [1]) est celui du cas  $g(n) = h(n) = 1$ . Alors  $f(n) = d(n) =$  nombre des diviseurs de  $n$ . Il est alors bien connu <sup>2)</sup> que la formule (1) donne:

$$\sum_{1 \leq n \leq x} d(n) = x \log x + O(x),$$

tandis que la méthode de l'hyperbole donne, avec  $\xi = \sqrt{x}$ :

$$(3) \quad \sum_{1 \leq n \leq x} d(n) = x \log x + (2\gamma - 1)x + O\left(x^{\frac{1}{2}}\right),$$

$\gamma$  désignant la constante d'Euler.

Cependant on démontre, par des méthodes analytiques, qu'en fait le terme-erreur de (3) est  $O(x^c)$ , pour une constante convenable  $c < \frac{1}{3}$  (cf. par exemple [2] et [3]).

3. Nous démontrons ci-dessous, par la méthode de l'hyperbole, certains résultats nouveaux, que l'on ne peut guère rendre plus précis par des méthodes analytiques (cependant voir ci-dessous IV).

## II. SUR UN THÉOREME DE HARDY ET RAMANUJAN

1. Soit  $\omega(n)$  le nombre des diviseurs premiers distincts de l'entier positif  $n$ . Hardy et Ramanujan [4] ont prouvé que, lorsque  $x \rightarrow +\infty$ :

$$\sum_{1 \leq n \leq x} \omega(n) = x \log \log x + Bx + O\left(\frac{x}{\log x}\right),$$

où  $B$  est une constante  $[B = \gamma + \sum_p (\log(1 - \frac{1}{p}) + \frac{1}{p})]$ , la sommation étant étendue à tous les  $p$  premiers <sup>3)</sup>. De plus, Hardy et Ramanujan ([4], p. 347) annoncent que ce théorème asymptotique peut être amélioré « par des méthodes transcendantes ». Cependant, à notre connaissance, aucune telle amélioration n'a été publiée à ce jour.

Nous démontrons ici:

2) Voir par exemple [12] ou [13].

3) Dans tout cet article, les lettres  $p, p', p'', \dots$  désigneront exclusivement des nombres premiers; la lettre  $q$  désignera exclusivement les entiers « quadratfrei ».