

# Chapitre V

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1971)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$V(x, y)$  cherchée est donnée par la formule

$$V = a e^{-x} \cos y + b e^{-3x} \cos 3y + c e^{-5x} \cos 5y + \dots$$

Fourier est ainsi conduit à remarquer que la série

$$\frac{4}{\pi} \left( \cos y - \frac{1}{3} \cos 3y + \frac{1}{5} \cos 5y - \dots \right)$$

a pour somme 1 quand  $y$  est compris entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $+\frac{\pi}{2}$  et qu'elle a pour

somme  $-1$  quand  $y$  est compris entre  $\frac{\pi}{2}$  et  $3\frac{\pi}{2}$ . Ainsi, voilà une série d'ex-

*pressions analytiques dont la somme est une fonction discontinue*, premier résultat. Fourier remarque d'ailleurs qu'on aurait pu supposer d'autres

données sur  $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$  de  $Oy$ . Si l'on avait supposé  $V = 1$  de  $-\frac{\pi}{2}$  à

$0$ , et  $V = 0$  de  $0$  à  $+\frac{\pi}{2}$ , le problème aurait encore été résolu par une série

trigonométrique. Ici *les données sont discontinues et le problème ne sort pas du domaine des mathématiques*, second résultat.

Mais le premier problème de Fourier prouve plus encore: *il se peut que des fonctions discontinues interviennent naturellement dans la solution de problèmes dont toutes les données sont continues*<sup>1)</sup>, troisième résultat.

Cela suffisait pour inciter les mathématiciens à réfléchir à l'étendue de la notion de fonction, à la puissance de représentation des expressions analytiques et à la nécessité de définir la continuité autrement que le faisait Euler.

Cela suffit aussi pour que ceux qui s'occupent des fonctions les plus générales aient l'espérance que certaines de leurs recherches puissent servir quelque jour la Physique mathématique.

## CHAPITRE V

Cauchy, dans son cours de l'Ecole polytechnique, définit les fonctions par les correspondances. Il définit à la manière aujourd'hui classique la continuité en un point et dans un intervalle. Il semble cependant que Cauchy ne considère encore que les correspondances qu'on obtient par des

---

<sup>1)</sup> En apparence du moins car la discontinuité de  $V(x, y)$  pour  $x = 0, y = \frac{\pi}{2}$ , était évidente.

procédés analytiques car, immédiatement après la définition du mot fonction, il divise les fonctions en explicites et implicites suivant la forme de la relation définissant cette fonction. De plus, Cauchy ne cite jamais que des fonctions définies par des procédés analytiques et il parle parfois sans explications de ce que devient une fonction quelconque de variable réelle quand on met un nombre complexe à la place de cette variable.

Il faut dire cependant que la restriction apportée par Cauchy à l'idée générale de fonction n'est jamais formulée explicitement et qu'elle n'intervient implicitement que dans peu de raisonnements.

C'est Dirichlet et Riemann qui, comme l'on sait, insistèrent sur l'intérêt qu'il pouvait y avoir à considérer des correspondances définies par n'importe quel procédé; ils montrèrent par des exemples l'extraordinaire étendue de la notion de fonction.

Mais déjà Cauchy avait fait des raisonnements indépendants de toute définition analytique des fonctions; en particulier il avait démontré en précisant un raisonnement d'Euler que toute fonction continue est la dérivée d'une autre fonction; Cauchy définissait l'intégrale des fonctions continues. Il légitimait donc l'emploi d'une des deux opérations fondamentales du calcul infinitésimal pour une catégorie très vaste et très importante de fonctions. Dirichlet, puis surtout Riemann, élargirent la catégorie des fonctions auxquelles on peut attacher une intégrale. Ils augmentaient ainsi l'importance de l'intégration et sa puissance. M. Darboux, à son tour, a augmenté encore cette puissance en attachant à chaque fonction bornée, non plus une seule intégrale mais une intégrale par défaut et une intégrale par excès.

Dans ces travaux, on voit apparaître la théorie des ensembles comme auxiliaire de la théorie des fonctions. Cauchy avait, comme auparavant Fourier, intégré quelques fonctions discontinues. Lipschitz rapporte que Dirichlet, généralisant le procédé de Cauchy, indiqua une méthode qui permet d'intégrer les fonctions dont l'ensemble des points de discontinuité n'a qu'un nombre fini de points limites. La généralisation des méthodes de Cauchy et de Dirichlet conduit naturellement à des résultats assez généraux, mais qui ne s'appliquent qu'aux fonctions dont les points de discontinuité forment un ensemble réductible au sens de M. G. Cantor.

La méthode de Riemann est tout autre; cependant ce sont encore des propriétés de l'ensemble des points de discontinuité qui distinguent les fonctions auxquelles s'applique la méthode. Ces propriétés font intervenir ce que l'on appelle aujourd'hui la mesure des ensembles. Cette notion nouvelle de mesure permet de caractériser simplement les fonctions inté-

grables au sens de Riemann; ce sont celles dont les points de discontinuité forment un ensemble de mesure nulle.

La théorie des ensembles de points a permis d'élargir encore, et très considérablement, la classe des fonctions auxquelles on peut attacher une intégrale, fonctions qu'on peut appeler sommables.

Ces fonctions se distinguent encore des autres par des propriétés relatives aux ensembles, mais il ne suffit plus de faire intervenir, pour les caractériser, leurs points de discontinuité car elles sont, en général, discontinues partout.

Dans la classe des fonctions sommables rentrent toutes les fonctions exprimables analytiquement, continues ou non. L'intégration a acquis une portée extrêmement générale.

Cependant une restriction subsiste, restriction qui paraît devoir être très limitative, dans beaucoup de recherches; pour que la méthode d'intégration des fonctions sommables s'applique, il faut qu'il s'agisse de fonctions bornées. La méthode s'applique bien aussi à quelques fonctions non bornées, mais ce sont en réalité des fonctions assez particulières<sup>1)</sup>; de plus, pour ces fonctions, cette méthode n'est pas la généralisation de celles qu'ont données Cauchy, Dirichlet et Riemann pour certaines fonctions non bornées et auxquelles se rapportent des travaux de MM. Jordan, Harnack, Hölder, De la Vallée Poussin, Stolz, Moore, Pierpont.

Dans ces recherches on s'était heurté tout d'abord à une difficulté un peu singulière; la définition qui paraissait naturelle, conduisait à attribuer à la somme de deux fonctions une intégrale différant parfois de la somme des intégrales des deux fonctions.

On a pu délimiter une classe de fonctions pour lesquelles cette difficulté n'apparaît pas.

Les différentes méthodes employées pour définir l'intégrale sont d'accord entre elles lorsqu'elles s'appliquent simultanément, mais on ne les a pas

---

(<sup>1</sup>) Cette restriction nous semble assez curieuse aujourd'hui. En fait, dans ses « Leçons sur l'intégration » parues en 1904, Lebesgue avait déjà donné la définition des fonctions sommables quelconques (p. 115), mais sans y insister beaucoup; les « fonctions assez particulières » dont il parle ici semblent donc bien être les fonctions sommables non bornées les plus générales.

Les restrictions qu'il exprime semblent venir du fait qu'il avait en vue d'autres généralisations de l'intégrale. Les auteurs qu'il cite plus loin permettent de penser qu'il pensait à deux sortes d'extensions possibles:

L'une a plus tard été développée par M. Arnaud Denjoy sous le nom de *totalisation*. L'autre qui a pour origine la notion de valeur principale, a été partiellement développée par M. Jacques Hadamard, mais n'a trouvé son véritable cadre que dans la Théorie des Distributions de M. Laurent SCHWARTZ.

encore réunies dans une méthode unique; c'est dire qu'il y a encore beaucoup à faire dans cette direction. Les difficultés que l'on rencontre n'étant pas sans analogie avec celles qui s'opposaient à la sommation des séries divergentes, il est permis d'espérer que les progrès faits récemment dans ce dernier ordre d'idées pourront servir à étendre encore la portée de l'intégration.

## CHAPITRE VI

On pourrait se demander si, à côté des généralisations de l'intégrale que je viens d'examiner, ne pourraient pas s'édifier d'autres généralisations tout aussi naturelles et tout aussi utiles. Il serait imprudent de déclarer cela impossible, mais c'est peu vraisemblable.

Plaçons-nous d'abord à un point de vue purement analytique. L'intégrale est un nombre attaché à la fonction intégrée  $f$  et à l'intervalle d'intégration  $(a, b)$ ; pour que ce nombre puisse servir, il faut, de toute nécessité, qu'il satisfasse à certaines conditions simples telles que la suivante: l'intégrale de  $f + \varphi$  dans  $(a, b)$  doit être la somme des intégrales de  $f$  et de  $\varphi$  dans  $(a, b)$ . Or, il suffit d'énoncer six conditions, présentant toutes, sauf une, les caractères de simplicité et de nécessité de celle que je viens d'indiquer, pour que l'intégrale des fonctions sommables soit entièrement déterminée.

En examinant les choses du point de vue géométrique, on est conduit aussi à avoir pleine confiance, je crois, dans les généralisations de l'intégrale. On sait les rapports entre les notions d'intégrale et d'aire; à mesure que se précisait la notion d'intégrale, celle d'aire se précisait aussi.

Les recherches sur la mesure d'aire, les recherches de Riemann et de P. du Bois Reymond sur les conditions d'intégralité, les recherches de MM. Cantor, Peano, Jordan et Borel sur les ensembles de points et les recherches sur les intégrales multiples, que je laisse de côté ainsi que celles sur l'intégration et la différenciation sous le signe  $\int$  et celles sur l'intégration par parties, toutes ces recherches conduisent naturellement à une généralisation des notions de longueur, d'aire et de volume, qui est la notion de mesure d'un ensemble.

On sait maintenant attacher une mesure à presque tout ensemble. Du moins on ne connaît aucun ensemble auquel ne s'applique pas les procédés de mesure. Et la mesure définie par ces procédés est la seule qui satisfasse à la fois à ces deux conditions:

- 1) La mesure de deux ensembles égaux est la même,