

# Chapitre IX

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1971)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

directement en se donnant à priori les conditions essentielles auxquelles elle doit satisfaire.

Si l'on veut que les aires de deux domaines égaux soient égales, si l'on veut que l'aire du domaine formé par la réunion de deux autres soit la somme des aires de ces deux autres, l'aire est déterminée à un multiplicateur près qui correspond au choix laissé arbitraire de l'unité d'aire pour tous les domaines que M. Jordan appelle les domaines quarrables. Quant aux autres domaines, leur aire n'est pas déterminée par les conditions précitées.

Si l'on considère un domaine formé par la réunion d'une infinité de domaines composants, l'aire précédemment définie du domaine total est la somme des aires des domaines constituants, quand il s'agit de domaines quarrables; mais il est impossible de profiter de l'indétermination de l'aire des domaines non quarrables pour que, dans tous les cas, l'aire d'un domaine  $D$  soit la somme des aires des domaines en lesquels on peut décomposer  $D$ .

On voit par ces résultats que les problèmes qui se posent sont moins simples qu'on aurait pu le croire. J'ajoute que cette manière de poser le problème des aires, qui peut évidemment être aussi utilisée pour les volumes, est susceptible d'être employée dans un ouvrage élémentaire, comme l'ont fait voir MM. Gérard et Nievenglowski, d'une part, M. Hadamard, de l'autre.

## CHAPITRE IX

Lorsqu'on se borne aux courbes convexes, ou décomposables en courbes convexes, la définition d'Archimède convient; il est vrai que les polygones circonscrits n'existent pas toujours, si l'on entend par polygone circonscrit un polygone dont les côtés sont des tangentes à la courbe, mais ils existent toujours si l'on entend par polygone circonscrit un polygone dont chaque côté n'a qu'un point commun avec la courbe. D'ailleurs, les méthodes qui réussissent dans le cas de la circonférence permettent de démontrer l'identité des deux limites qui interviennent dans la définition d'Archimède. Mais si l'on prend une courbe quelconque, les mêmes raisonnements ne conviennent plus. Après que Paul Du Bois Reymond eût signalé les difficultés que l'on rencontre dans la définition des longueurs, Ludwig Scheeffer, puis M. Jordan, reprirent la question. Voici leur résultat essentiel: si l'on considère une suite quelconque de lignes polygonales inscrites dans une courbe et dont les longueurs des côtés tendent vers zéro, les longueurs de ces lignes tendent vers une limite, finie ou non, indépendante de la suite de lignes choisies.

Cette limite est appelée la longueur de la courbe. Les courbes à longueur finie sont dites rectifiables. M. Jordan a montré de plus qu'une courbe était rectifiable ou non suivant que les trois coordonnées  $x, y, z$ , étaient toutes trois, ou non, des fonctions à variation bornée du paramètre variable; une fonction à variation bornée est la différence de deux fonctions croissantes.

Il semble que ces travaux résolvent toute la question, mais de nombreux mémoires relatifs à la rectification des courbes, en particulier ceux de M. Study, soulèvent bien d'autres points. Une question à laquelle on pense de suite, et qu'avait déjà abordée Scheeffer, est celle du calcul de la longueur. Voici un résultat simple:

Supposons que les dérivées  $x', y', z'$  aient toujours un sens et soient finies, alors la longueur finie ou infinie de la courbe est toujours l'intégrale de  $\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ .

Voilà un exemple qui montre l'intérêt que peuvent avoir les généralisations de l'intégrale.

Pour passer aux aires, il est bon de remarquer que la définition adoptée pour les longueurs est équivalente à celle-ci: la longueur d'une courbe  $C$  est la plus petite des limites des longueurs des lignes polygonales tendant vers  $C$ . Il sera donc naturel de dire: l'aire d'une surface  $S$  est la plus petite limite des aires des surfaces polyédrales tendant vers  $S$ . Cette définition est d'accord avec les définitions adoptées pour les cas particuliers qu'on examine généralement, car, avec elle, l'aire de  $z = f(x, y)$  est l'intégrale de

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2},$$

$\frac{\partial z}{\partial x}$  et  $\frac{\partial z}{\partial y}$  étant supposées continues.

Qu'est-ce qui va correspondre à l'évaluation approchée de la longueur d'une courbe à l'aire de polygones inscrits? Divisons la surface en morceaux. Soit  $C$  le contour d'un morceau, nous appellerons aire minima de  $C$  la plus petite limite des aires des surfaces polyédrales ayant un seul contour qui tend vers  $C$ . Comme valeur approchée de l'aire d'une surface on peut prendre la somme des aires minima des contours limitant les morceaux de la surface. Seulement, comme on pouvait s'y attendre d'après ce qui se passe dans le cas du plan, on ne peut prendre les contours que dans une famille spéciale de courbes, laquelle contient d'ailleurs toutes les courbes rectifiables.

On voit que les choses se compliquent beaucoup, mais on ne peut guère espérer arriver comme dans le cas des courbes à prendre pour définition générale une définition voisine de celle d'Archimède, car M.M. Peano et Schwartz ont montré à peu près au même moment, que même pour le cas simple du cylindre de révolution les surfaces polyédrales inscrites ont des aires qui ne tendent pas nécessairement vers l'aire du cylindre quand on fait tendre vers zéro toutes les arêtes de ces surfaces polyédrales.

Il est vrai que l'on peut cependant adopter encore la définition d'Archimède, à condition de dire que l'on ne considère que des surfaces polyédrales convexes, mais comme il existe des surfaces très simples, le paraboloid hyperbolique par exemple, qui ne sont pas décomposables en morceaux convexes, il est indispensable de ne pas s'en tenir à la définition d'Archimède.

La définition que j'ai indiquée plus haut n'a pas encore été beaucoup étudiée, on ne sait presque rien sur la représentation paramétrique des surfaces d'aire finie, ni sur l'expression de l'aire.<sup>1)</sup>

D'autres définitions ont été proposées. Je laisse de côté celles dans lesquelles on a essayé de considérer des surfaces polyédrales inscrites et assujetties à certaines conditions supplémentaires. Ces définitions, presque toutes insuffisantes, même pour le cylindre, ne s'appliquent que dans des cas peu généraux et sont très arbitraires. Je laisse aussi de côté la définition proposée par Hermite, et qui est reproduite dans beaucoup de traités d'analyse français parce qu'elle ne s'applique qu'aux surfaces ayant des plans tangents et parce que, faisant intervenir les axes de coordonnées, c'est seulement le calcul de l'aire qui montre que cette aire est indépendante des axes choisis.

Je veux dire quelques mots d'une définition proposée indépendamment par M.M. Laisant et Peano. Considérons un contour fermé  $C$ ; on peut, au moins dans les cas simples, trouver un contour plan  $C_1$  tel que les projections de  $C$  et de  $C_1$  sur un même plan quelconque de l'espace limitent toujours des aires égales. L'aire de  $C_1$  est l'aire gauche de  $C$ ; on voit de suite l'analogie entre l'aire gauche d'un contour et la distance de deux points. Cette analogie comprise, on devine que l'on va appeler aire d'une surface la limite supérieure des nombres obtenus en divisant la surface en morceaux d'une façon quelconque et en attachant à chaque division la

---

<sup>1)</sup> De très nombreux travaux ont éclairé beaucoup ces questions, bien qu'on manque encore d'une théorie simple; les travaux actuels sur l'aire des surfaces sont encombrés d'un arsenal très lourd de notions dont toutes ne sont sans doute pas définitives. Voir T. RADO, *Length and Area*, Colloquium Publications, Princeton 1948 (572 p.) et L. CESARI, *Surface Area*, Annals of Math. Study, Princeton 1956 (593 p.). G. C.

somme des aires gauches des contours de ces morceaux. M. Frechet a signalé un rapprochement curieux entre l'aire gauche et l'aire des domaines plans en montrant que l'aire gauche peut être définie simplement par certaines de ses propriétés, analogues à celles que l'on peut employer pour définir l'aire des domaines plans.

Pour en finir avec ces questions sur lesquelles j'ai longuement insisté parce qu'on les considère volontiers comme tranchées depuis longtemps alors qu'il est très facile d'apercevoir combien il reste à faire, je signalerai une très jolie définition employée récemment par M. Minkowski et qui avait été aperçue dès 1854 par Borchardt.

Les définitions dont j'ai parlé jusqu'ici sont des traductions en langage mathématique des opérations que l'on fait pour mesurer pratiquement une courbe ou une surface en la remplaçant par une ligne polygonale ou des surfaces polyédrales voisines mais on peut aussi opérer pratiquement d'une autre manière: supposons qu'il s'agisse de mesurer une courbe ou une surface réalisées matériellement sous forme de fil, ou de feuilles; on pourra évaluer de bien des manières le volume de l'objet, par exemple à l'aide du poids. Le quotient du volume par l'aire de la section du fil ou par l'épaisseur de la feuille est la longueur ou l'aire, au point de vue pratique, de l'objet considéré.

C'est en traduisant ce procédé opératoire en langage mathématique que M. Minkowski a été conduit à toute une suite de définitions qui lui ont permis de renouveler le problème des isopérimètres.

La comparaison de toutes ces définitions reste à faire.

## CHAPITRE X

Je reviens maintenant aux opérations fondamentales de l'analyse; après l'intégration, la dérivation.

Autrefois on plaçait toujours le calcul différentiel avant le calcul intégral; dans son cours d'analyse, M. Jordan définit l'intégrale avant la dérivée. Cela peut se justifier: si l'on recherche les origines géométriques de la dérivation et de l'intégration, on trouve que celles de l'intégration précèdent, et de beaucoup, les autres; puis l'intégration est plus générale que la dérivation; puis encore bien des résultats sur la dérivation se déduisent immédiatement de ceux relatifs à l'intégration.

On dit parfois, d'une façon un peu trop absolue, que les géomètres des siècles derniers admettaient que toute fonction a des dérivées. J'ai eu