Chapitre XII

Ces nombres sont les plus grandes et plus petites limites du rapport incrémentiel quand on fait tendre l'accroissement de la variable vers O positivement et négativement; la signification géométrique de ces nombres est évidente. MM. Dini, Scheeffer, puis M. Volterra ont montré que la connaissance de l'un de ces nombres dérivés suffit pour déterminer la fonction tout comme lorsqu'il s'agit de la dérivée ordinaire; mais une restriction est nécessaire au raisonnement, il faut que les nombres dérivés soient bornés. M. Hans Hahn vient de montrer tout récemment que cette restriction est nécessaire aussi pour l'exactitude du résultat, même s'il s'agit de la dérivée ordinaire, car M. Hahn a construit deux fonctions ayant partout la même dérivée (égale en certains points à $+\infty$) et dont la différence n'est pas constante.

En supposant que les nombres dérivés soient bornés et intégrables au sens de Riemann, on peut remonter par l'intégration d'un nombre dérivé à la fonction primitive. Mais c'est une restriction supplémentaire que de supposer les nombres dérivés intégrables au sens de Riemann, car M. Volterra a construit une fonction continue dérivable dont la dérivée est bornée et n'est pas intégrable.

Pour la recherche des fonctions primitives, une généralisation de l'intégrale, plus large que celle de Riemann, était donc nécessaire. L'intégration des fonctions sommables permet toujours de remonter d'une dérivée bornée ou d'un nombre dérivé borné à la fonction primitive; mais elle ne le permet pas toujours pour les fonctions non bornées. Ainsi, *on ne sait pas encore remonter dans tous les cas d'une dérivée à la fonction primitive.* [1])

Chapitre XII

Voici maintenant des résultats relatifs à l'existence de la dérivée ordinaire.

On sait que Dirichlet a distingué parmi les fonctions continues, celles qui n'ont qu'on nombre fini de maxima et de minima. Une remarque très

---

[1]) Les travaux de M. Arnaud Denjoy ont apporté à cette question une réponse définitive et ses méthodes, basées sur une synthèse de l'intégrale de Lebesgue et des propriétés descriptives des fonctions découvertes par R. Baire ont trouvé de nombreuses applications à d'autres questions, en analyse et en géométrie. (Voir plus loin l'application aux séries trigonométriques.). Son « Mémoire sur la dérivation et son calcul inverse », paru de 1915 à 1917 en plusieurs parties dans divers périodiques, a été republié sous forme de livre en 1954 (Gauthier-Villars). G. C.

simple et très heureuse a permis à M. Jordan d'étendre à toute la classe des fonctions à variation bornée beaucoup des propriétés des fonctions de Dirichlet. M. Dini et les géomètres italiens ont dans diverses recherches généralisé différemment la classe des fonctions de Dirichlet; il distingue des autres les fonctions $f(x)$ pour lesquelles on peut choisir la constante K de manière que $f(x) + Kx$ soit une fonction de Dirichlet. Cette distinction a conduit M. Dini à diverses remarques concernant l'existence de la dérivée. J'énonce l'une d'elles, presque immédiate, et cependant intéressante: s'il n'existe qu'une valeur de K pour laquelle $f(x) + Kx$ ne soit pas une fonction de Dirichlet autour de x_0, $f(x)$ a une dérivée pour $x = x_0$.

L'intégration des fonctions sommables conduit à des résultats d'une autre nature dont voici le principal: si $f(x)$ est à nombres dérivés bornés, c.à.d. si $f(x)$ satisfait à l'inégalité

$$|f(x+h) - f(x)| < kh\,, \quad (k = \text{constante})\,,$$

bien connue dans la théorie des équations différentielles sous le nom de condition de Lipschitz, $f(x)$ a une dérivée, sauf tout au plus pour des valeurs de x formant un ensemble de mesure nulle. La fonction $f(x)$ est d'ailleurs déterminée à une constante additive près, quand on connaît sa dérivée là où elle existe.

Voici une conséquence de la propriété indiquée: si l'on exprime en fonction de l'arc s les coordonnées des points d'une courbe rectifiable, on a l'égalité

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1\,,$$

sauf tout au plus pour des valeurs de s formant un ensemble de mesure nulle. De là résulte aussi qu'une courbe rectifiable a presque partout des tangentes et que sa longueur peut être exprimée par l'intégrale classique dans un cas très étendu auquel on peut toujours ramener le cas général.

Après un long détour nous voici revenus aux procédés élémentaires de raisonnement et de calcul dont la portée se trouve ainsi considérablement augmentée, et en même temps nous avons eu l'occasion de distinguer des classes particulières de fonctions à propriétés assez simples pour qu'on puisse raisonner facilement sur elles.