Chapitre XIII

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1971)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

Chapitre XIII

Je passe à des questions un peu différentes et dont l'origine se trouve, comme je l'ai dit, dans les travaux de Fourier. Puisqu'une série convergente de fonctions continues ne représente pas toujours une série continue, puisqu'elle n'est pas toujours dérivable terme à terme [1]), ni toujours intégrable, il y a lieu de rechercher dans quels cas on peut raisonner sur elle comme si elle ne contenait qu'un nombre fini de termes.

A cette question on répondit tout d'abord par la distinction entre la convergence uniforme et la convergence non uniforme; cette distinction, aperçue par Abel et Cauchy puis par Stokes, Seidel, et bien d'autres est maintenant trop classique pour que j'insiste sur son importance.

M. Dini a introduit une définition plus large: celle des séries à convergence uniforme simple; ces séries, quand leurs termes sont continus, ont des sommes continues mais il n'est pas toujours possible de les intégrer terme à terme. M. Dini a démontré aussi qu'une série convergente de fonctions dérivables pouvait être dérivée terme à terme pourvu que la série des dérivées soit à convergence uniforme simple et cela, que ces dérivées soient intégrables au sens de Riemann, ou non. Cette propriété et deux ou trois autres moins importantes constituent tout ce que l'on sait sur la dérivation des séries.

Au contraire on a des résultats très généraux sur la continuité des séries et leur intégration. M. Arzela a fait voir qu'une série convergente de fonctions continues a pour somme une fonction continue si, quels que soient e et n positifs, on peut trouver N de manière que pour chaque valeur de X l'un au moins des restes d'indices compris entre n et N est en valeur absolue inférieur à E. Cette condition est à la fois nécessaire et suffisante.

A la vérité, cela peut se démontrer si simplement qu'on peut être tenté de considérer cette propriété comme une tautologie sans intérêt. Mais il ne faut rien dédaigner, même pas les tautologies; une vérité peut être suggestive ou non, suivant la manière dont on l'exprime. Si la condition de M. Arzela n'est qu'une transformation simple de la définition même de la continuité d'une série, ce paraît être du moins une transformation heureuse.

M. Arzela a fait connaître aussi la condition nécessaire et suffisante

---

[1]) Cet argument est probablement un lapsus, car on peut construire des séries de Fourrier dont la somme soit continue, sans que la somme de la série dérivée soit partout convergente (au sens classique). G. C.

pour qu'une série de fonctions intégrables au sens de Riemann ait une somme intégrable; cela ne veut d'ailleurs pas dire que ces séries soient intégrables terme à terme.

Sur l'intégration terme à terme, M. Osgood et ses élèves ont publié d'intéressants mémoires. Une série peut être convergente de bien des manières; si l'on ne sait pas encore caractériser nettement le degré de convergence et la nature de la convergence d'une série, les questions sont nombreuses où il apparaît qu'une classification des types de convergence est nécessaire. Le point de départ de M. Osgood est une distinction, déjà faite par Seidel, entre deux expèces de points de convergence. Une série étant supposée convergente partout il y a des points autour desquels la convergence est uniforme [1]), d'autres autour desquels cela n'a pas lieu. M. Osgood distingue deux espèces de ces points de non-uniforme convergence; autour des premiers les restes de la série sont bornés, autour des seconds, que l'on appelle les points X, cela n'est pas. On devine bien que les points X vont être les plus gênants et en effet, M. Osgood a fait voir que ces points s'opposaient seuls à l'intégration terme à terme; d'une façon précise il a prouvé que si une série de fonctions continues a une forme continue dans un intervalle libre de points X on peut l'intégrer dans cet intervalle.

Les élèves de M. Osgood publient de nombreuses généralisations en divers sens de cet important résultat. La théorie des fonctions sommables fournit à la fois une démonstration très simple et une généralisation étendue du théorème de M. Osgood: une série convergente de fonctions sommables, pourvu que la somme soit bornée, représente une fonction sommable et si l'ensemble des restes de la série est borné, cette série est intégrable terme à terme.

Chapitre XIV

C'est à l'occasion de séries trigonométriques que furent posés les plus importants des problèmes de la théorie générale des fonctions; pour cette raison ces séries, si importantes d'ailleurs dans plusieurs parties des mathématiques, ont dans cette théorie une place à part que n'ont pas les autres développements spéciaux.

---

[1]) D'après R. Baire, si une suite de fonctions continues est convergente, elle converge uniformément en tout point d'un ensemble partout dense, qui est d'ailleurs un *résiduel* au sens de M. Denjoy.
G. C.