

# Chapitre XXII

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1971)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

diction que nous avons relevée ne nous permet pas de construire cet ensemble. Mais je veux m'occuper seulement des deux points de vue indiqués.

La question agitée entre *I.* et *E.* est, si l'on veut, l'existence de fonctions arbitraires, de fonctions sans loi. Seulement le mot *loi*, par lequel je désignais précédemment tout ce qu'on peut traduire par une expression analytique, désigne maintenant tout ce qu'on peut exprimer à l'aide de mots. Il me paraît probable qu'on ferait faire des progrès à la question si l'on réussissait à trouver, à l'aide de raisonnements empiristes des propriétés communes à toutes les fonctions de l'*E.* sans qu'elles appartiennent à toutes les fonctions de l'*I.* ce qu'il faudrait montrer par des considérations idéalistes. Bien entendu, dans une telle recherche il faudrait tenir compte, plus qu'on ne l'a fait jusqu'ici, de ce que définir une fonction c'est la caractériser par un nombre fini de mots. Les propriétés qu'on obtiendrait seraient certainement très différentes de celles qui caractérisent les fonctions exprimables analytiquement car, d'une part, on peut nommer des fonctions non exprimables analytiquement et d'autre part, on ne peut pas nommer toutes les expressions analytiques que l'*I.* imagine: on ne pourrait pas nommer par exemple une série entière dont les coefficients ne seraient assujettis à aucune loi <sup>1)</sup>.

## CHAPITRE XXII

Ceux qui ont voulu élargir la notion de fonction ont toujours tiré argument de l'ignorance profonde dans laquelle nous sommes de la nature des fonctions déterminées physiquement.

L'*I.* à son tour, déclare qu'on doit considérer d'autres déterminations que les déterminations logiques si l'on veut pouvoir faire de la physique mathématique; car on doit pouvoir raisonner sur une fonction dès qu'elle est déterminée physiquement. A cela l'*E.* répond que l'expérience ne nous fait jamais connaître une fonction, mais seulement un nombre fini de nombres, par une interpolation nous en déduisons une fonction représentant le phénomène d'une manière approchée. Il est vrai que si l'on admet que cette approximation peut être aussi bonne que l'on veut, la difficulté reparaît. Mais rien ne nous oblige à admettre que l'approximation peut être poussée de plus en plus loin. Il me semble que chaque fois qu'on emploie un procédé

---

(10) De nombreuses études ont été faites par les logiciens sur les fonctions et nombres définissables. (cf. dans *J. of symbolic logic*, la bibliographie concernant ce sujet; voir en particulier les travaux de Gödel, Church, Kleene, Turing, Rosa Peter.) G. C.

de mesure plus parfait on définit à nouveau le nombre à obtenir; quand on mesure une route avec un mètre, ou quand on mesure la longueur d'onde d'une radiation lumineuse en mètres, par le procédé de Michelson, on emploie en réalité deux définitions différentes du mot longueur. Si l'on s'en tient à un procédé de mesure bien déterminé, c'est-à-dire à une définition particulière de la grandeur physique à mesurer, on apercevra toujours qu'il ne peut être rendu indéfiniment précis. Après une certaine précision limite il faudra recourir à un autre procédé, à une autre définition, pour aller plus loin; mais rien ne nous oblige à admettre qu'il est possible d'imaginer des procédés de plus en plus précis; en tous cas cette suite indéfinie de procédés n'est pas déterminée physiquement. Aussi peut-on penser qu'il entre beaucoup d'illusion dans la conception que l'*I.* se fait d'une mesure exacte.

L'*I.* trouve qu'en raisonnant ainsi on tourne les difficultés mais qu'on ne les résoud pas; l'*I.* de du Bois Reymond, après avoir exposé son système, ajoute: « ainsi, quand nous nous abandonnons à ces pensées qui paraissent si naturelles, l'*E.* voit en cela un égarement de l'instinct de connaissance. Il est possible que son intuition du monde le garantisse de mainte illusion, toutefois le renoncement qu'il s'impose n'est pas précisément le fait de chacun. En ne donnant un libre cours à ses pensées que dans les limites des représentations et des concepts qui répondent à des perceptions ou en sont abstraits, il agit comme l'enfant sage qui se garde bien de franchir la haie du jardin. La pensée idéaliste est le garçon pétulant qui se moque des limites, revendique comme sien le domaine entier des représentations et pressentiments et arrive à franchir les broussailles, à gravir les roches pour atteindre à des hauteurs d'où l'œil embrasse un vaste horizon. Il pourra s'égarer, mais à coup sûr il verra plus de choses que l'enfant sage ». Ailleurs il dit: « Les *I.* s'éteindront-ils un jour? je ne le crains pas. Comme *I.* j'ai sûrement une avance sur l'*E.* Quand je tiens mon système pour exact, je n'ai pas besoin de considérer le sien comme faux ».

Il est certain que jusqu'ici ce sont toujours ceux qui voulaient élargir la notion de fonction qui se sont trouvés avoir raison; en sera-t-il encore de même ainsi que l'affirme du Bois Reymond pour cette nouvelle extension que propose l'*I.*? Il est difficile de le prévoir; mais si les fonctions de l'*I.* se montraient utiles ou commodes pour l'explication des phénomènes naturels, les mathématiciens attacheraient moins d'importance aux difficultés de principe que leur emploi paraît soulever. Jusqu'à présent les *E.* et les *I.* se sont presque uniquement bornés à des discussions théoriques, les *E.* donnent volontiers une forme idéaliste à leurs raisonnements et les *I.* n'ont pas essayé d'étudier leur notion de fonction; il me paraît probable

que l'utilité de cette notion ne pourrait être mise en évidence qu'après une telle étude.

On pourrait penser, il est vrai, que l'inutilité de cette notion est dès maintenant prouvée, on pourrait dire: l'image d'une fonction déterminée physiquement ce n'est pas une courbe mais un nombre fini de points ou un nombre fini de rectangles, quand on a des renseignements sur les erreurs commises sur la variable et la fonction; dès lors, si l'on veut employer les fonctions mathématiques, il suffira de prendre une quelconque de ces fonctions pourvu qu'elle soit représentée par une courbe passant par tous les points ou dans tous les rectangles. Il est donc toujours inutile d'employer les fonctions de l'*I*. ou les fonctions discontinues de l'*E*.

Si l'on ne voulait introduire aucune hypothèse, il faudrait faire un raisonnement s'appliquant à toutes les fonctions continues ou non, d'accord avec l'expérience, et non pas choisir une des fonctions d'accord avec l'expérience, et raisonner sur elle; ou bien encore il faudrait raisonner directement sur les ensembles de points ou de rectangles que l'expérience fournit. Mais jusqu'à présent on ne sait effectuer aucune opération sur ces fonctions définies expérimentalement sur lesquelles M. Klein a attiré l'attention.

En particulier on ne voit pas ce que pourrait être que la dérivation de ces fonctions <sup>1)</sup>. On sait que la dérivée d'une fonction très petite peut être une fonction très grande en certains points ou, si l'on veut, que deux fonctions très voisines peuvent avoir des dérivées très différentes; et c'est pourquoi une série uniformément convergente n'est pas toujours dérivable terme à terme. Si donc de l'expérience nous déduisons une fonction approchée d'une autre fonction  $f$ , nous ne pourrions rien conclure relativement aux dérivées de  $f$  et par suite, si l'on ne voulait introduire aucune hypothèse, il faudrait, dans l'état actuel de nos connaissances, renoncer à l'emploi des équations différentielles à l'aide desquelles est construite toute la physique mathématique moderne. Aussi, au lieu de raisonner sur toutes les fonctions d'accord avec l'expérience, on choisit l'une d'elles par des considérations de simplicité et de commodité.

Tant qu'on n'a rien su sur les fonctions discontinues ces considérations de commodité commandaient impérieusement de choisir pour le raisonnement une fonction continue, ce qui est toujours possible; aussi les fonctions discontinues n'ont-elles été employées pendant longtemps que dans le seul

---

<sup>1)</sup> Les distributions de L. Schwartz ont justement été créés pour répondre à ce besoin. Elles permettent de donner un sens à la dérivée d'une fonction sommable quelconque.

Il est remarquable que Lebesgue ait si bien senti le besoin de cet outil et ait su l'exprimer aussi clairement.

cas du choc. Comme on ne connaît actuellement rien sur les fonctions de  $I$ , c'est toujours une fonction de  $E$ , qu'on choisit, mais comme on commence à savoir manier les fonctions discontinues il est possible d'introduire de telles fonctions dans les raisonnements et même, bien qu'il y ait de grandes différences entre le discontinu physique et le discontinu mathématique, il n'est pas invraisemblable que les fonctions discontinues soient particulièrement commodes pour l'étude de certaines théories où le discontinu physique intervient. C'est ainsi que certains mathématiciens espèrent utiliser quelques résultats récents de la théorie des fonctions pour l'éclaircissement des raisonnements souvent obscurs, parfois incohérents, de la théorie cinétique des gaz. <sup>1)</sup>

En poursuivant la solution de problèmes abordés depuis longtemps par des méthodes qui, croyait-on, n'utiliseraient pas de fonctions discontinues on est souvent conduit cependant à la considération de telles fonctions, c'est ce qui arrive constamment, par exemple, en hydrodynamique. De sorte que les études sur les fonctions générales trouveront peut-être là leur utilisation.

Tantôt les discontinuités que l'on rencontre affectent la fonction, tantôt elles n'affectent que ses dérivées; c'est ainsi que M. Hadamard vient de montrer que pour l'étude des plaques élastiques minces il était nécessaire d'admettre que certaines fonctions que l'on introduit dans cette étude ne sont pas dérivables. Sans doute ce ne sont pas nécessairement de ces fonctions partout sans dérivées comme Weierstrass en a construit, mais il suffit que ce soient des fonctions dont on ne peut utiliser les dérivées à la manière ordinaire pour que l'on soit en droit d'espérer que certains des travaux dont j'ai parlé aident à trancher les difficultés que l'on rencontre. Je terminerai en montrant par un exemple l'influence que cela peut avoir sur les résultats d'admettre ou non que les fonctions que l'on rencontre sont dérivables.

### CHAPITRE XXIII

Proposons-nous de déterminer les formes différentes que peut prendre une feuille de papier que l'on froisse.

Si l'on trouve une courbe sur cette feuille de papier on constate facile-

---

<sup>1)</sup> Depuis, les physiciens ont utilisé sans scrupule les masses ponctuelles (fonction de Dirac) et leurs dérivées de tout ordre. Ces procédés n'ont été justifiés que plus tard, en partie par le calcul symbolique, puis de façon rigoureuse et commode par les distributions.