

Chapitre XXIII

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1971)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

cas du choc. Comme on ne connaît actuellement rien sur les fonctions de l' I . c'est toujours une fonction de l' E . qu'on choisit, mais comme on commence à savoir manier les fonctions discontinues il est possible d'introduire de telles fonctions dans les raisonnements et même, bien qu'il y ait de grandes différences entre le discontinu physique et le discontinu mathématique, il n'est pas invraisemblable que les fonctions discontinues soient particulièrement commodes pour l'étude de certaines théories où le discontinu physique intervient. C'est ainsi que certains mathématiciens espèrent utiliser quelques résultats récents de la théorie des fonctions pour l'éclaircissement des raisonnements souvent obscurs, parfois incohérents, de la théorie cinétique des gaz. ¹⁾

En poursuivant la solution de problèmes abordés depuis longtemps par des méthodes qui, croyait-on, n'utiliseraient pas de fonctions discontinues on est souvent conduit cependant à la considération de telles fonctions, c'est ce qui arrive constamment, par exemple, en hydrodynamique. De sorte que les études sur les fonctions générales trouveront peut-être là leur utilisation.

Tantôt les discontinuités que l'on rencontre affectent la fonction, tantôt elles n'affectent que ses dérivées; c'est ainsi que M. Hadamard vient de montrer que pour l'étude des plaques élastiques minces il était nécessaire d'admettre que certaines fonctions que l'on introduit dans cette étude ne sont pas dérivables. Sans doute ce ne sont pas nécessairement de ces fonctions partout sans dérivées comme Weierstrass en a construit, mais il suffit que ce soient des fonctions dont on ne peut utiliser les dérivées à la manière ordinaire pour que l'on soit en droit d'espérer que certains des travaux dont j'ai parlé aident à trancher les difficultés que l'on rencontre. Je terminerai en montrant par un exemple l'influence que cela peut avoir sur les résultats d'admettre ou non que les fonctions que l'on rencontre sont dérivables.

CHAPITRE XXIII

Proposons-nous de déterminer les formes différentes que peut prendre une feuille de papier que l'on froisse.

Si l'on trouve une courbe sur cette feuille de papier on constate facile-

¹⁾ Depuis, les physiciens ont utilisé sans scrupule les masses ponctuelles (fonction de Dirac) et leurs dérivées de tout ordre. Ces procédés n'ont été justifiés que plus tard, en partie par le calcul symbolique, puis de façon rigoureuse et commode par les distributions.

ment que sa longueur varie peu, alors il sera naturel de traduire mathématiquement le problème de la manière suivante: trouver les surfaces dont les points correspondent à ceux d'une portion de plan, la correspondance étant biunivoque et continue, et conservant les longueurs; c'est-à-dire trouver les surfaces applicables sur le plan.

On sait que la réponse classique à cette question est la suivante: il y a identité entre la famille des surfaces applicables sur le plan et la famille des surfaces dites développables qui sont formées par les tangentes à une courbe gauche ou encore, si l'on veut, qui sont enveloppes d'un plan variable dépendant d'un paramètre. Ces surfaces développables ne fournissent même pas grossièrement la solution du problème physique; on peut trouver à cela diverses raisons.

Les uns diront que le problème physique a été mal traduit. Il ne s'agit pas de la déformation d'une surface, mais de celle d'un corps ayant trois dimensions, et les longueurs ne sont pas exactement conservées. Cela est incontestable; cependant, nous pouvons répondre à la première objection en disant que c'est se conformer aux habitudes que d'assimiler à une surface un corps dont une des dimensions est très petite et que d'une telle assimilation on arrive ordinairement à tirer une solution suffisante dans la pratique de problème qu'on se proposait. Quant à la seconde objection, ou bien il faut passer outre ou bien il faut rechercher toutes les surfaces qui sont à peu près applicables sur le plan, puisque nous ne savons rien sur la loi de variation des longueurs. C'est là un problème certainement intéressant et qui est en relation simple avec celui des plaques élastiques qu'à étudié M. Hadamard.

Mais on peut remarquer aussi qu'il existe des surfaces exactement applicables sur le plan et qui ne sont pas des surfaces développables. Il est facile, par exemple, de trouver des surfaces polyédriques, non convexes, qui ne sont ni des surfaces prismatiques, ni des surfaces pyramidales et qui sont cependant applicables sur le plan sans déchirure ni duplication. Or il faut remarquer que par un pliage convenable d'une feuille de papier on peut obtenir des réalisations matérielles de ces surfaces aussi parfaites qu'est la réalisation d'un plan sous forme d'une feuille de papier. Si incontestables que soient les objections indiquées, qui peuvent contenir le germe d'une autre solution du même problème physique, il semble donc bien qu'on doive reprendre l'étude du problème géométrique lui-même. La seule hypothèse faite dans la solution classique de ce problème est celle de l'existence si l'on n'admet pas que cette existence est nécessaire, on trouve des surfaces applicables sur le plan autre que les surfaces développables. Ces surfaces

n'ont pas toutes été étudiées, on ne peut pas dire si toutes fournissent bien une solution approchée du problème physique; mais il est remarquable que toutes celles de ces surfaces qui sont de révolution et dont certaines ne contiennent aucun morceau de droite sont réalisables à l'aide de la feuille de papier d'une manière aussi approchée qu'il est désirable.

S'il fallait avoir souvent recours pour l'explication de phénomènes naturels à des solutions analogues à celle que je viens d'indiquer, ce qu'on regretterait sans doute, le plus, c'est que ces solutions n'utilisent aucune expression analytique qui fournirait vraisemblablement l'occasion d'appliquer les si nombreux résultats que nous possédons concernant les fonctions analytiques et celles qui en dérivent simplement. Il est bien probable que de toute façon, une telle utilisation ne tarderait pas; en ce qui concerne le problème des surfaces applicables sur le plan, si l'on se rappelle que les coordonnées x, y, z des points d'une courbe rectifiable d'arc s vérifient presque partout la relation classique

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1;$$

il est possible d'espérer que les équations

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2 = 1, \quad \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial y} = 0, \quad \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2 = 1,$$

pourront encore servir de quelque manière à caractériser les surfaces applicables sur le plan et à les obtenir toutes.

Je voudrais avoir réussi à montrer l'intérêt des travaux dont j'ai parlé et que j'ai choisis un peu arbitrairement plutôt parce que je les connaissais mieux que parce qu'ils sont plus importants. On croit trop souvent que la théorie générale des fonctions de variables réelles a donné depuis longtemps tout ce qu'elle était capable de fournir qui soit utile au progrès général des mathématiques et qu'on ne peut plus actuellement s'intéresser à cette théorie que par amour des complications et pour le plaisir de rencontrer des difficultés à vaincre.

Peut-être faut-il une nature particulière d'esprit pour s'intéresser à ce genre de questions? Si cela est, on doit, il me semble, se féliciter que cette tournure d'esprit se rencontre parfois et souhaiter que ceux qui l'ont arrivent à introduire ordre et simplicité là où le désordre et la complication règnent actuellement, en apparence du moins; mais il n'y a pas là de rai-

sons suffisantes pour déclarer inutiles les recherches sur les fonctions réelles.¹⁾

Ceux qui ont bien voulu me lire se demanderont sans doute s'il est évident qu'elles seront nécessairement sans intérêt les réponses qu'on arrivera peut-être à faire à ces questions dont j'ai parlé et qui, posées à l'occasion de problèmes simples et naturels dès l'époque de l'invention du calcul infinitésimal, furent alors jugées très importantes à résoudre pour les progrès généraux de l'Analyse. Au reste, il serait facile de montrer que la théorie générale des fonctions réelles a été utilisée dans certains travaux récents sur les fonctions analytiques de variables complexes à la considération desquelles on a voulu parfois restreindre l'Analyse. C'est ainsi que dans l'étude des séries entières, dans l'étude des équations différentielles, on a eu l'occasion d'utiliser des modes de raisonnements, des distinctions ou des définitions auxquelles la théorie des fonctions réelles nous a habitués et dont elle nous a révélé l'importance.

¹⁾ Ce ton polémique et un peu amer est le reflet des critiques que subissaient alors la jeune école française de la part des mathématiciens plus classiques pour lesquels toute fonction était continue ou même analytique. L'avenir a amplement montré que les craintes de Lebesgue n'étaient pas fondées et l'on ne songe plus, comme il le fait un peu plus bas, à justifier par ses applications à la théorie des fonctions analytiques, la théorie des « fonctions réelles » (qui s'est aujourd'hui tellement développée qu'elle englobe en fait aujourd'hui l'ensemble de l'analyse).
G. C.

(Reçu le 2 février 1971)