

# LA GÉOMÉTRIE PLANE EN CLASSE DE SECONDE

Autor(en): **Fourès, L.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1971)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-44573>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# LA GÉOMÉTRIE PLANE EN CLASSE DE SECONDE

(Nouveaux programmes des lycées français)

par L. FOURÈS (Marseille)

## INTRODUCTION

La publication de nouveaux programmes pour la classe de seconde de l'enseignement secondaire français a causé beaucoup de remous dans le corps enseignant de nos lycées et collèges. On ne saurait dire que les nombreux ouvrages parus sur ce sujet, et devant faciliter ce nouvel abord de la géométrie élémentaire, aient atteint leur objectif.

Nous rappelons quelques lignes significatives de ce programme.

... Titre 2: Nombres réels.

... 5 Equations du premier degré à une inconnue dans  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{Q}$ .  
Systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues. Déterminant.

6 ... Etude de problèmes dont la résolution conduit à des équations ou inéquations du premier degré.

Titre 3: Fonctions numériques d'une variable réelle.

... 3 Etude de la fonction linéaire définie par  $f(x) = ax$  et de la fonction affine définie par  $g(x) = ax + b$ . Exemple de fonctions affines par intervalles.

Titre 4: Géométrie plane et espaces vectoriels sur  $\mathbf{R}$ .

1 Application d'une droite sur  $\mathbf{R}$ , les points (distincts) d'images respectives 0 et 1 étant choisis. Abscisse d'un point. Mesure algébrique d'un segment orienté sur une droite orientée. Formule de Chasles. Segment défini par les abscisses des points qui le limitent. Mesure algébrique d'un segment orienté; longueur; abscisse du milieu. Changement de repère.

2 Rappel de certaines propriétés affines du plan. La droite dans le plan; détermination par deux points. Droites parallèles. Le parallélisme est une relation d'équivalence.

Notion de direction. Milieu de deux points. Le parallélogramme et ses caractéristiques.

- 3 Bipoint. Equipollence. Vecteurs du plan. Notation  $\overrightarrow{AB}$  pour le vecteur dont le bipoint  $(A, B)$  est un représentant. Addition des vecteurs...

Il ressort de ces lignes que les alinéas cités des titres 2 et 3 préparent à l'introduction d'une structure affine de la droite et du plan. Il me paraît même souhaitable de compléter ce titre 3 par une étude de l'application affine  $R^2 \rightarrow R^2$ , étude pour laquelle tous les éléments ont déjà été rassemblés.

Les pages qui suivent sont destinées au titre 4 de ce programme. Une difficulté surgit dès la première ligne de ce titre 4. De toute évidence cette ligne n'a pas de sens si la structure affine de la droite n'a pas été préalablement définie, et une fois cette structure définie, le problème posé devient mineur. Certains auteurs d'ouvrages dont je parlais au début, ont cru expliquer cette première ligne par l'usage à peine (ou même pas) déguisé d'une fonction distance que l'on ne saurait construire que par le « bon et vieux procédé » des « transports » d'un segment unité. Trop de générations ont souffert de cette méthode d'illusioniste qui permettait de démontrer les « cas d'égalité des triangles » et autres gadgets ne relevant strictement que du dessin géométrique; de toute manière, l'introduction d'une fonction distance qui n'est pas une notion affine est en désaccord absolu avec l'esprit de ce programme de géométrie manifestement conçu sur le principe suivant :

1. Préciser la structure affine du plan.
2. Dégager une structure d'espace vectoriel à partir de la structure affine.

On ne peut donc admettre l'introduction d'une notion non affine et en particulier d'une métrique.

D'autres auteurs ont préféré adopter la solution très contemporaine, rigoureuse à souhait, consistant à bâtir la géométrie à partir de la notion d'espace vectoriel lancée en premier lieu à la face du lecteur, de l'auditeur ou de l'élève. Or c'est précisément la démarche inverse qui est explicitement indiquée dans le programme. Il me paraît assez naturel de mettre en évidence la structure vectorielle sur l'exemple du plan, ce qui aura l'avantage d'éviter aux élèves plus tard de commettre de grosses erreurs sur la nature et l'usage de ces mêmes vecteurs; il sera aussi normal de reconsidérer, en première, la géométrie à partir de la notion d'espace vectoriel, mais cette

construction viendra en son temps avec tous les avantages qu'elle présente.

Dans le programme officiel, la géométrie est précédée par l'étude de  $\mathbf{R}$  (dont il faut faire ressortir les caractères par rapport à ceux de  $\mathbf{Q}$ ) et aussi par l'étude de la fonction affine. Dans un intérêt de cohérence logique et également en vue de son utilisation en géométrie, il paraît normal d'introduire, avec les systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues (II, § 5) la fonction affine de  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ . Cela ne présente aucune difficulté sérieuse, le caractère bijectif ou la dégénérescence de cette fonction étant de simples applications de l'étude des systèmes d'équations. Après cela il n'est rien de plus naturel que de fonder l'étude de la droite sur celle de  $\mathbf{R}$ , l'étude du plan sur celle de  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ . Je ne pense pas que l'on puisse m'objecter d'utiliser trop de calculs algébriques, je n'utiliserai strictement que des fonctions affines. D'autre part, il est bien évident que  $\mathbf{R}$  doit intervenir d'une manière fondamentale et pourquoi refuser la connaissance de  $\mathbf{R}$ , lui préférer une « axiomatisation » ingénieuse ou compliquée de la droite qui revient en fin de compte à une axiomatisation détournée de  $\mathbf{R}$  ?

Quant aux dessins ils ne sont d'aucune utilité; l'usage a voulu que l'instrument appelé « règle » permette de tracer des droites, c'est-à-dire de dessiner très localement des traits qui, tout au moins dans les limites de la feuille de papier, se comportent aussi bien que des droites. Il nous arrivera de faire des dessins, généralement pour alléger un texte, mais aucune démonstration ne se fera sur un dessin.

Cette première partie que nous traitons dans les pages suivantes pourrait s'intituler: *Structures affines de la droite et du plan*.

Dans le premier chapitre « La droite », nous envisageons la droite comme espace sans environnement, c'est-à-dire que cette droite n'est jamais « vue de l'extérieur »; physiquement cela revient à imaginer les géomètres de la droite situés dans la droite ne pouvant se repérer que dans la droite et nullement par des éléments extérieurs. Pourquoi avons-nous l'habitude de « voir » la droite de l'extérieur, le plan par dessus ou par dessous et l'espace dit « à trois dimensions » de l'intérieur ? Il y a là un manque d'homogénéité des points de vue, difficilement admissible aujourd'hui.

Le deuxième chapitre « Le plan », adopte bien entendu le même point de vue, mais d'autres éléments seront introduits, « Les droites du plan », qui sont en quelque sorte les droites vues de l'extérieur, c'est-à-dire que les repérages sur cette droite peuvent se faire non seulement à partir de la droite elle-même mais aussi à partir du plan dans lequel est cette droite; il en résulte que les droites du plan « ressemblent » davantage aux droites traditionnelles.

CHAPITRE PREMIER. — LA DROITE

1. — Report des structures de  $\mathbf{R}$

*Définition* : Une droite est un couple formé d'un ensemble  $D$  et d'une bijection  $j : D \rightarrow \mathbf{R}$ .

*Cas particulier* : Droite standard :  $(\mathbf{R}; \mathcal{I})$  où  $\mathcal{I}$  est l'application identique de  $\mathbf{R}$  sur lui-même.

Soit  $(D; j)$  une droite; la bijection  $j$  permet le report par  $j^{-1}$  des diverses structures de  $\mathbf{R}$ .  $j : D \rightarrow \mathbf{R}$  est appelée paramétrisation (ou fonction de paramétrisation) de  $(D; j)$ .

Exemples de report de structures.

A. STRUCTURE D'ORDRE.

$\mathbf{R}$  est ordonné par  $\leq$ .  $j^{-1}$  permet donc de définir une structure d'ordre  $\leq$  sur  $D$  par :

$$A \leq B \Leftrightarrow j(A) \leq j(B)$$

*Problème*. Soit  $(D; j)$  une droite et  $(D; k)$  une autre droite définie sur le même support  $D$  avec une paramétrisation différente  $k$ . Dans quelles conditions la structure d'ordre définie sur  $D$  par  $j$  est-elle la même que la structure d'ordre définie par  $k$  ?

$\leq_1$  pour la structure d'ordre définie par  $j$ ;  $\leq_2$  pour la structure d'ordre définie par  $k$ .

$$A \leq_1 B \Leftrightarrow j(A) \leq j(B) \quad \text{et} \quad A \leq_2 B \Leftrightarrow k(A) \leq k(B)$$

$\leq_1$  et  $\leq_2$  définissent la même structure d'ordre  $\Leftrightarrow$

$$\forall A, B \in D \quad j(A) \leq j(B) \Leftrightarrow k(A) \leq k(B)$$

Ou encore en posant  $j(A) = a$  et  $j(B) = b$  et en remarquant que  $j$  est une bijection :

$$\forall a, b \in \mathbf{R} \quad a \leq b \Leftrightarrow k \circ j^{-1}(a) \leq k \circ j^{-1}(b)$$

c'est-à-dire  $k \circ j^{-1}$  est monotone croissante.

*Proposition 1.1*. Deux paramétrisations  $j, k : D \rightarrow \mathbf{R}$  définissent la même structure d'ordre sur  $D \Leftrightarrow k \circ j^{-1}$  est monotone croissante.

*Conséquence* : Un problème sur la droite  $(D; j)$  qui ne fait intervenir que la structure d'ordre définie par  $j$  sur  $D$  peut être traité en remplaçant la

paramétrisation  $j$  par toute autre paramétrisation  $k$  telle que  $k \circ j^{-1}$  soit monotone croissante.

La relation «  $j$  et  $k$  définissent sur  $D$  la même structure d'ordre » est une relation d'équivalence:

$$j \circ j^{-1} = \mathcal{J} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \text{ monotone croissante.}$$

Si  $k \circ j^{-1}$  est monotone croissante il en est de même de  $(k \circ j^{-1})^{-1} = j \circ k^{-1}$ .

Si  $k \circ j^{-1}$  est monotone croissante et si  $l \circ k^{-1}$  est monotone croissante, il en est de même pour  $(l \circ k^{-1}) \circ (k \circ j^{-1}) = l \circ j^{-1}$ , d'où la transitivité.

L'ensemble des bijections de  $D$  sur  $\mathbf{R}$  est donc séparable en classes d'équivalence par la relation précédente.

*Définition:* Une droite ordonnée est un couple  $(D; \Omega)$  formé d'un ensemble  $D$  et d'une classe de bijections définissant la même structure d'ordre sur  $D$ .

*Droite ordonnée standard:* La droite ordonnée standard est  $(\mathbf{R}; \Omega)$  où  $\Omega$  est la classe des bijections de  $\mathbf{R}$  sur  $\mathbf{R}$  équivalentes à l'identité, c'est-à-dire:

$$j \in \Omega \Leftrightarrow j \circ \mathcal{J}^{-1} = j \text{ est monotone croissante.}$$

## B. STRUCTURE AFFINE.

Soient  $(D; j)$  et  $(D; k)$  deux droites définies sur le même ensemble  $D$  par deux bijections distinctes. On dit que  $j$  et  $k$  définissent sur  $D$  la même structure affine  $\Leftrightarrow k \circ j^{-1} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  est une fonction affine.

C'est-à-dire:

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbf{R} \text{ tels que } \forall x \in \mathbf{R} \quad k \circ j^{-1}(x) = \alpha x + \beta$$

Remarquer que  $k$  et  $j$  étant effectivement des bijections, la fonction affine  $k \circ j^{-1}$  ne peut pas être dégénérée, c'est-à-dire  $\alpha \neq 0$ .

La relation «  $j$  et  $k$  définissent sur  $D$  la même structure affine » est une relation d'équivalence:

$$* \quad j \circ j^{-1} = \mathcal{J}$$

$$* \quad \text{si } k \circ j^{-1}(x) = \alpha x + \beta \qquad j \circ k^{-1}(x) = \frac{1}{\alpha} x - \frac{\beta}{\alpha}$$

(qui a un sens puisque,  $\alpha \neq 0$ )

$$* \quad \text{si } k \circ j^{-1}(x) = \alpha x + \beta \text{ et } l \circ k^{-1}(x) = \gamma x + \delta$$

$$l \circ j^{-1}(x) = l \circ k^{-1} \circ k \circ j^{-1}(x) = \gamma(\alpha x + \beta) + \delta = \gamma\alpha x + \gamma\beta + \delta$$

qui est affine.

*Droite affine* : Une droite affine est un couple  $(D; \mathcal{A})$  formé d'un ensemble  $D$  et d'une classe de bijections de  $D$  sur  $\mathbf{R}$  définissant une même structure affine (on dit aussi, affinement équivalentes).

Une propriété affine est une propriété de  $(D; \mathcal{A})$  c'est-à-dire une propriété de  $(D; j)$  indépendante du choix de  $j$  dans une même classe de bijections affinement équivalentes.

*Droite affine standard*. La droite affine standard est le couple  $(\mathbf{R}; \mathcal{A}_0)$  où  $\mathcal{A}_0$  est la classe des bijections de  $\mathbf{R}$  sur lui-même affinement équivalentes à l'identité c'est-à-dire, des bijections  $j$  telles que :

$$j \circ \mathcal{J}^{-1}(x) = j(x) = \alpha x + \beta$$

### C. STRUCTURE PROJECTIVE.

Ce paragraphe n'est pas explicitement au programme de la classe de Seconde mais il peut contribuer à montrer l'intérêt du procédé utilisé qui établit un lien de conception entre les diverses structures étudiées sur la droite.

On notera  $\mathbf{R}^\# = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$  c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels complété par adjonction de  $\infty$ . On envisage les couples  $(\mathcal{E}; j)$  d'un ensemble  $\mathcal{E}$  et d'une bijection  $j : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{R}^\#$ . Deux bijections  $k$  et  $j$  sont projectivement équivalentes  $\Leftrightarrow k \circ j^{-1}$  est une bijection homographique de  $\mathbf{R}^\#$  sur lui-même. On doit vérifier que la relation «  $j$  et  $k$  sont projectivement équivalentes » est une relation d'équivalence.

*Droite projective* : Une droite projective est un couple  $(\mathcal{E}; \mathcal{H})$  formé d'un ensemble  $\mathcal{E}$  et d'une classe de bijections projectivement équivalentes.

*Droite projective standard*. La droite projective standard est le couple  $(\mathbf{R}^\#; \mathcal{H}_0)$  où  $\mathcal{H}_0$  est la classe des bijections de  $\mathbf{R}^\#$  sur lui-même, projectivement équivalentes à l'identité, c'est-à-dire des bijections définies par :

$$j(x) = j \circ \mathcal{J}^{-1}(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$$

Remarquer que  $j$  doit être une bijection, donc cette fonction homographique ne peut être dégénérée, c'est-à-dire  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ . Dans ces conditions,

$$j(\infty) = \frac{\alpha}{\gamma} \text{ et } j\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right) = \infty \quad \text{si } \gamma \neq 0; \quad \text{si } \gamma = 0 \quad j(\infty) = \infty.$$

## 2. — Quelques notions affines

### *Abscisse d'un point.*

Soit  $(D; j)$  une droite; la valeur de la fonction de paramétrisation  $j$  en un point  $M$  est appelée l'abscisse de  $M$  sur  $D$ .

Evidemment l'abscisse d'un point n'est pas une propriété affine du point puisque  $j(M)$  varie avec  $j$ , même si  $j$  est limité à varier à l'intérieur d'une classe affine de paramétrisations.

### *Segment non orienté.*

Soient  $A \in D, B \in D$ , on appelle « segment  $AB$  » et on note :

$$[AB] = \{ M \in D \mid j(A) \leq j(M) \leq j(B) \text{ ou } j(B) \leq j(M) \leq j(A) \}$$

Le segment défini par deux points est une notion affine : si  $M \in [AB]$  pour une paramétrisation  $j$  on a encore  $M \in [AB]$  pour une paramétrisation  $k$  affinement équivalente à  $j$ .

Si on ne limite pas  $j$  il n'y a plus nécessairement coïncidence des segments définis par les mêmes points. Exemple: Soit la droite standard  $(\mathbf{R}; j)$  d'une part, et d'autre part la droite  $(\mathbf{R}; k)$  où  $k : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  est défini par  $k(x) = x$  si  $x$  n'est pas entier,  $k(n) = n - 1$  si  $n$  est entier (positif, négatif ou nul).

Soit  $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$  défini par la première paramétrisation, l'identité; soit  $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]_*$

le segment défini par les mêmes points avec la paramétrisation  $k$ .  $1 \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$

mais  $k(1) = 0$  donc  $1 \notin \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]_*$ ; de même:

$$\begin{aligned} [0, 1]_* &= \{ M \in \mathbf{R} \mid -1 = k(0) \leq k(M) \leq k(1) = 0 \} = \\ &= \{ 0 \} \cup \{ 1 \} \cup \{ \chi \in \mathbf{R} \mid -1 < \chi < 0 \} \end{aligned}$$

### *Mesure algébrique d'un segment orienté.*

Soient  $A \in D, B \in D$ , on appelle mesure du segment orienté  $A, B$  et on note :

$$\overline{AB} = j(B) - j(A)$$



La mesure algébrique d'un segment orienté dépend de la paramétrisation  $j$  même si  $j$  est limité à une même classe affine de paramétrisations. Toutefois:

**Proposition 2.1.** Le rapport des mesures algébriques de deux segments orientés d'une même droite est une notion affine.

Soient  $A, B$  d'une part,  $C$  et  $D$  d'autre part, deux couples de points sur  $D$ ; soient  $j$  et  $k$  deux paramétrisations de  $D$ , affinement équivalentes. La proposition 2.1. s'exprime:

$$\frac{j(B) - j(A)}{j(D) - j(C)} = \frac{k(B) - k(A)}{k(D) - k(C)} \text{ qui est donc à établir.}$$

On pose  $j(A) = a, j(B) = b, j(C) = c, j(D) = d$  et  $k \circ j^{-1}(x) = \alpha x + \beta$  de sorte que:

$$\frac{k(B) - k(A)}{k(D) - k(C)} = \frac{k \circ j^{-1}(b) - k \circ j^{-1}(a)}{k \circ j^{-1}(d) - k \circ j^{-1}(c)} = \frac{\alpha b - \alpha a}{\alpha d - \alpha c} = \frac{b - a}{d - c}.$$

**Proposition 2.2.** Les deux propositions suivantes sont des propriétés affines:

- a)  $\forall A, B \in D \quad \overline{AB} = -\overline{BA}$
- b)  $\forall A, B, C \in D \quad \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$  (que l'on écrit aussi  $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB}$ )

Cette dernière proposition est la « formule de Chasles ».

La vérification de 2.2. est immédiate suivant la même méthode que celle utilisée pour vérifier 2.1.

*Longueur d'un segment non orienté.*

$(D; j)$  étant une droite, on note  $|AB| = |\overline{AB}| = |j(B) - j(A)|$  la longueur du segment non orienté  $[A, B]$ .

La longueur d'un segment dépend de  $j$  même si  $j$  est limité à une classe affine de paramétrisations; toutefois comme conséquences immédiates des propositions 2.1. et 2.2.:

\* Le rapport des longueurs de deux segments d'une même droite est une notion affine.

- \*  $|AB| = |BA|$
  - \* Si  $C \in [AB] \quad |AB| = |AC| + |BC|$
- } ces deux propositions étant affines.

*Milieu d'un segment.*

*Problème :*  $A$  et  $B$  étant deux points de  $(D; j)$  existe-t-il un point  $M \in [A, B]$  tel que  $|MA| = |MB|$  ?

Si un tel point  $M$  existe,  $\frac{|MA|}{|MB|} = 1$ ; il est à prévoir d'après la proposition 2.1., que  $M$  est alors défini sur la droite affine et non seulement sur la droite  $(D; j)$ .

Si  $M$  existe  $M \in [A, B]$  et vérifiant  $|MA| = |MB|$  sur une droite  $(D; j)$ , on doit avoir (en supposant  $j(A) < j(B)$ ):

$j(M) - j(A) \geq 0, j(B) - j(M) \geq 0$  et  $|j(A) - j(M)| = |j(B) - j(M)|$  c'est-à-dire:

$$0 \leq j(M) - j(A) = j(B) - j(M).$$

D'où  $j(M) = \frac{1}{2}(j(A) + j(B))$  qui vérifie bien  $j(A) \leq j(M) \leq j(B)$ . La

relation  $j(M) = \frac{1}{2}(j(A) + j(B))$  détermine un point unique du segment  $[AB]$  et ce point vérifie  $|MA| = |MB|$ .

En mesure algébrique la relation déterminant  $M$  s'écrit  $\overline{AM} = \overline{MB}$  (valable même si  $j(A) > j(B)$ ), c'est-à-dire  $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -1$ . Comme la valeur de ce rapport est indépendante de la paramétrisation dans une même classe affine de paramétrisations, il en résulte que le point  $M$  déterminé à partir de la paramétrisation  $j$  vérifie aussi  $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -1$  avec la paramétrisation  $k$ , affinement équivalente à  $j$ .

Le point  $M$  du segment  $[A, B]$  vérifiant  $|MA| = |MB|$  est le milieu du segment  $[A, B]$ .

La propriété pour un point d'être le milieu d'un segment est une propriété affine.

*Point partageant un segment dans un rapport donné.*

On a posé le problème du milieu d'un segment en termes de longueur de segments non orientés et on a abouti à la résolution du problème suivant: déterminer  $M$  sur la droite  $D$  de sorte que  $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -1$ . Ainsi posé le pro-

blème a une solution affine. On peut alors poser le problème suivant :

Déterminer  $M$  sur la droite de sorte que  $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \rho$  où  $\rho$  est un nombre réel.

Bien évidemment une représentation paramétrique  $j$  est nécessaire pour résoudre le problème mais s'il y a une solution, cette solution ne dépend pas de  $j$  dans une même classe d'équivalence affine.

$$j(A) - j(M) - \rho(j(B) - j(M)) = 0$$

d'où

$$(\rho - 1)j(M) = -j(A) + \rho j(B),$$

relation qui détermine  $j(M)$  sauf si  $\rho - 1 = 0$ , c'est-à-dire que l'on sait déterminer,  $M$  d'ailleurs unique, vérifiant  $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \rho$  sauf pour  $\rho = 1$ ,

$$j(M) = \frac{-1}{\rho - 1} j(A) + \frac{\rho}{\rho - 1} j(B)$$

Remarquer que la somme des coefficients de  $j(A)$  et  $j(B)$  dans la formule précédente est 1.

Si on pose :

$$\alpha = \frac{-1}{\rho - 1}, \beta = \frac{\rho}{\rho - 1} \quad \text{on a } \alpha + \beta = 1 \text{ et } j(M) = \alpha j(A) + \beta j(B)$$

*Barycentre.*

$M$  est appelé le barycentre des points  $A$  et  $B$  affectés des coefficients respectifs  $\alpha$  et  $\beta$ ,  $(\alpha + \beta) = 1$ .

Le couple formé d'un point et d'un nombre réel est appelé un point matériel: soit  $(A, \alpha)$  un point matériel;  $A$  en est le support géométrique et  $\alpha$  la masse.  $(M, 1)$  déterminé par  $j(M) = \alpha j(A) + \beta j(B)$  est le barycentre des points matériels  $(A, \alpha)$  et  $(B, \beta)$  avec  $\alpha + \beta = 1$ .

Si  $\alpha' + \beta'$  n'a pas la valeur particulière 1, on définit encore le barycentre des points matériels  $(A, \alpha')$ ,  $(B, \beta')$  par  $(M, \alpha' + \beta')$  où  $M$  est défini sur  $D$  par :

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -\frac{\beta'}{\alpha'}, \text{ c'est-à-dire } j(M) = \frac{\alpha'}{\alpha' + \beta'} j(A) + \frac{\beta'}{\alpha' + \beta'} j(B).$$

Si on écrit  $(M, \alpha' + \beta') = (A, \alpha') + (B, \beta')$  on peut prétendre avoir défini une « addition » entre points matériels, et cette prétention serait tout à fait

légitime dans la mesure où cette addition vérifierait les lois algébriques de l'addition, ce qui n'est pas tout à fait le cas. L'étude de cette « addition » peut néanmoins se justifier dans une classe de Seconde, ne serait-ce que pour mieux mettre en évidence les « bonnes » propriétés de l'addition (de l'opération de groupe en général) en faisant voir par un contre exemple tel que celui-là que ces « bonnes » propriétés ne « vont pas de soi ».

*Problème.*

Est-ce que, en restreignant au besoin la classe des paramétrisations admissibles, d'autres structures de  $\mathbf{R}$ , par exemple l'addition, peuvent être reportées sur  $(D; j)$ ? Si l'addition de  $\mathbf{R}$  se reporte sur  $(D; j)$  on définit:

$$A = B + C \Leftrightarrow j(A) = j(B) + j(C).$$

Soit alors à déterminer à quelles conditions (sur  $k$ ) la somme  $B + C$  déterminée sur  $(D; k)$  est la même que la somme  $B + C$  déterminée sur  $(D; j)$ .

$$\forall B, C \in D, j^{-1}(j(B) + j(C)) = k^{-1}(k(B) + k(C))$$

équivalent à:

$$\forall b, c \in \mathbf{R}, k \circ j^{-1}(b + c) = k(B) + k(C) = k \circ j^{-1}(b) + k \circ j^{-1}(c).$$

La condition pour que  $k$  et  $j$  déterminent la même somme sur  $D$  est que  $k \circ j^{-1} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  conserve l'addition. Cette relation est encore une relation d'équivalence mais n'est pas l'équivalence affine.

A l'intérieur d'une classe affine la relation «  $k \circ j^{-1}$  conserve l'addition » définit une classe linéaire.

## CHAPITRE II. — LE PLAN

On adopte le même point de vue que dans l'étude de la droite. Nous considérons un plan comme un espace en soi sans espace environnant. Il n'est pas question de « regarder un plan » de l'extérieur, donc de parler de son aspect « plan ou courbe », puisqu'il n'y a aucun repère extérieur pour apprécier ces qualités traditionnelles.

*Définition :* Un plan est un couple  $(P; J)$  formé d'un ensemble et d'une bijection  $J : P \rightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ .

*Plan standard :*  $(\mathbf{R} \times \mathbf{R}; \mathcal{J})$  ou simplement plan  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ , dans lequel  $\mathcal{J} : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{R}$  est l'application identique.

$J$  permet d'une manière générale le report sur  $P$  des structures de  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$  moins familières que celles de  $\mathbf{R}$ .

*Plan affine.*

Soient deux plans  $(P; J)$ ,  $(P; K)$  déterminés par deux bijections  $J$  et  $K$  définies sur le même ensemble  $P$ .

On dit que  $J$  et  $K$  définissent sur  $P$  la même structure affine  $\Leftrightarrow K \circ J^{-1} : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{R}$  est une fonction affine (forcément non dégénérée):

$$K \circ J^{-1}(x, y) = (ux + vy + w, u'x + v'y + w'), \quad uv' - vu' \neq 0$$

On vérifie que la relation «  $J$  et  $K$  définissent la même structure affine sur  $P$  » est une relation d'équivalence.

Un plan affine est un couple  $(P; \mathcal{S})$  formé d'un ensemble et d'une classe de bijections de  $P$  dans  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$  affinement équivalentes.

*Plan affine standard:*  $(\mathbf{R} \times \mathbf{R}, \mathcal{S}_0)$  où  $\mathcal{S}_0$  est la classe des bijections de  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$  sur lui-même affinement équivalentes à l'identité.

*Remarque.* On pourrait s'intéresser à la structure métrique obtenue par report de la structure métrique de  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$  dans lequel la distance de deux points  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  est définie par exemple, par:

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Remarquons d'une part, que cette valeur de la distance n'est pas une propriété affine, c'est-à-dire n'est pas invariante par une transformation affine; or nous nous bornons à une étude des structures affines; d'autre part, nous verrons que deux points définissent une droite et la longueur sera définie sur cette droite grâce à une paramétrisation qui sera évidemment liée à la structure du plan; cette longueur ne coïncidera pas avec la distance que l'on aurait définie par le procédé précédent.

Le premier problème qui se pose est celui de la définition des droites du plan. Ici les droites placées dans le plan sont « vues de l'extérieur », elles dépendent de l'espace environnant: le plan.

*Droites dans  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ .*

Dans cette partie le plan étudié est le plan standard  $(\mathbf{R} \times \mathbf{R}, \mathcal{S}_0)$  noté simplement  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ .

Un sous-ensemble de  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$  en bijection avec  $\mathbf{R}$  est une droite au sens donné au chapitre premier mais n'est pas en général une « droite du plan  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$  ».

*Support de droite dans  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ .*

Un sous-ensemble  $D$  de  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$  est un support de droite dans  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$  s'il est du type suivant:

$$D = \{ (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid \exists \text{ une correspondance affine entre } x \text{ et } y \}$$

Il y a une correspondance affine entre  $x$  et  $y$  s'il existe trois nombres réels  $\alpha, \beta, \gamma$  tels que  $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$  avec la condition:  $\alpha$  et  $\beta$  non tous deux nuls.

Projections. On notera  $pr_1 : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  définie par  $pr_1(x, y) = x$

$$pr_2 : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \text{ définie par } pr_2(x, y) = y$$

Si  $\beta \neq 0$  la restriction de  $pr_1$  à  $D$  réalise une bijection  $j_1$  de  $D$  sur  $\mathbf{R}$ ;

$$j_1^{-1}(x) = \left( x, -\frac{1}{\beta}(\alpha x + \gamma) \right)$$

Si  $\alpha \neq 0$  la restriction de  $pr_2$  à  $D$  réalise une bijection  $j_2$  de  $D$  sur  $\mathbf{R}$ ;

$$j_2^{-1}(y) = \left( -\frac{1}{\alpha}(\beta y + \gamma), y \right)$$

Dans le cas où  $j_1$  et  $j_2$  sont toutes deux définies ( $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ ),  $j_1$  et  $j_2$  sont affinement équivalentes:

$$j_2 \circ j_1^{-1}(x) = j_2 \left( x, -\frac{1}{\beta}(\alpha x + \gamma) \right) = -\frac{1}{\beta}(\alpha x + \gamma)$$

Pour tout support de droite l'une des bijections  $j_1$  ou  $j_2$  est définie et réalise une paramétrisation de  $D$ . Les cas exceptionnels correspondent aux supports de droite:

$$D = \{ (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid \alpha x + \gamma = 0 \quad \alpha \neq 0 \} = \left\{ -\frac{\gamma}{\alpha} \right\} \times \mathbf{R}$$

et

$$D = \{ (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid \beta y + \gamma = 0 \quad \beta \neq 0 \} = \mathbf{R} \times \left\{ -\frac{\gamma}{\beta} \right\}$$

*Droite dans  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ .* Une droite affine dans  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$  est le couple  $(D, \mathcal{A})$  formé d'un support de droite  $D$  et de la classe  $\mathcal{A}$  des bijections de  $D$  sur  $\mathbf{R}$  affinement équivalentes à  $j_1$  ou  $j_2$ .  $D = \{ (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid \exists \text{ une corres-}$

pondance affine entre  $x$  et  $y$  }.  $j_1$  est la restriction à  $D$  de  $pr_1$ ;  $j_2$  est la restriction à  $D$  de  $pr_2$ .

Il en résulte qu'une droite affine dans  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$  est parfaitement déterminée par son support. D'où l'usage qui consiste à utiliser une même notation pour la droite et son support, et même d'appeler droite son ensemble support.

### *Fonctions de rectification.*

On voit alors l'intérêt qu'aurait une fonction définie sur  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ , à valeurs dans  $\mathbf{R}$  et dont la restriction à tout support de droite quelconque réaliserait une paramétrisation de la droite correspondante.

$pr_1, pr_2$  sont deux fonctions de cette espèce avec toutefois la restriction qu'il existe pour chacune de ces fonctions une famille de droites exceptionnelles sur lesquelles la restriction de  $pr_1$  (ou  $pr_2$ ) est une fonction constante.

*Problème* : Déterminer une fonction  $\varphi : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  dont la restriction à tout support de droite  $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ , réalise une bijection de  $D$  sur  $\mathbf{R}$ , pouvant paramétrer la droite  $D$ .

Soit  $D = \{x_0\} \times \mathbf{R}$  un support de droite;  $j_2$  réalise une paramétrisation de  $D$  donc la restriction  $\varphi|_D$  de  $\varphi$  à  $D$  doit être affinement équivalente à  $j_2$ . On doit donc avoir:

$$\varphi(x_0, y) = \varphi(j_2^{-1}(y)) = \alpha y + \beta$$

dans lequel  $\alpha$  et  $\beta$  sont des nombres dépendant de  $D$  c'est-à-dire de  $x_0$ .

On doit donc écrire:

$$\varphi(x, y) = \alpha(x) y + \beta(x)$$

Soit alors  $D' = \mathbf{R} \times \{y_0\}$  paramétrée par  $j_1$ .  $\varphi(x, y) = \alpha'(y) x + \beta'(y)$ .

Si  $x = 0 : \forall y \in \mathbf{R}, \beta'(y) = \alpha(0) y + \beta(0)$  et avec  $y = 0, \forall x \in \mathbf{R}, \alpha'(0) x + \beta'(0) = \beta(x)$ .

On pose alors  $\alpha(0) = a, \alpha'(0) = a'$  et en remarquant ( $x=0, y=0$ )  $\beta(0) = \beta'(0) = c$ , on obtient:

$$\beta'(y) = ay + c \quad \text{et} \quad \beta(x) = a'x + c$$

d'où l'on déduit:

$$\forall x, y \quad \varphi(x, y) = \alpha'(y) x + ay + c = \alpha(x) y + a'x + c$$

d'où

$$\forall x \quad \varphi(x, 1) = \alpha'(1)x + a + c = \alpha(x) + a'x + c$$

c'est-à-dire:

$$\alpha(x) = (\alpha'(1) - a')x + a = bx + a$$

et

$$\forall y \quad \varphi(1, y) = \alpha'(y) + ay + c = \alpha(1)y + a' + c$$

c'est-à-dire:

$$\alpha'(y) = (\alpha(1) - a)y + a' = b'y + a'$$

d'où

$$\forall x, y \quad \varphi(x, y) = b'xy + a'x + ay + c = bxy + ay + a'x + c,$$

d'où  $b = b'$ .

Soit alors la droite  $D'' = \{(x, y) \mid x = y\}$ ,

$$\varphi \circ j_1^{-1}(x) = \varphi(x, x) = bx^2 + (a + a')x + c;$$

or  $\varphi \circ j_1^{-1}$  doit être une fonction affine d'où:  $b = 0$ .

Les seules fonctions  $\varphi$  satisfaisant éventuellement aux conditions du problème sont de la forme:

$$\varphi(x, y) = a'x + ay + c$$

Soit alors  $D = \{(x, y) \mid \alpha x + \beta y + \gamma = 0, \alpha \text{ et } \beta \text{ non tous deux nuls}\}$ ,  
une droite de  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ .

Si

$$\beta \neq 0, \text{ on a } \forall x, y \in D, y = -\frac{1}{\beta}(\alpha x + \gamma)$$

d'où:

$$\varphi \circ j_1^{-1}(x) = \varphi\left(x, -\frac{1}{\beta}(\alpha x + \gamma)\right) = a'x - \frac{a}{\beta}(\alpha x + \gamma) + c$$

$\varphi \circ j_1^{-1}$  est bien une fonction affine non dégénérée si  $a' - \frac{a\alpha}{\beta} \neq 0$ .

Si  $\beta a' - \alpha a = 0$ ,  $j_1$  n'étant pas dégénérée, c'est que  $\varphi$  restreint à  $D$  n'est pas une paramétrisation. Cherchons alors sans utiliser  $j_1$  si la restriction de  $\varphi$  à  $D$  réalise une bijection de  $D$  sur  $\mathbf{R}$ .



Soit  $u \in \mathbf{R}$ , existe-t-il  $(x, y) \in D$  tel que  $\varphi(x, y) = u$  ?

On est amené à résoudre le système :

$$\begin{cases} ax + \beta y + \gamma = 0 \\ a'x + ay + c = u \end{cases}$$

qui a une solution unique sauf si  $\alpha a = a' \beta$  qui est bien la condition d'exception trouvée précédemment.

D'où il résulte que le problème posé n'a pas de solution.

**Proposition 1.**  $\exists$  une famille de fonctions  $\mathcal{X}$ , telle que la restriction à toute droite de toute fonction de la famille  $\mathcal{X}$  est, ou une constante ou une paramétrisation de cette droite, affinement équivalente à l'une ou l'autre des restrictions des projections.

Les fonctions de la famille  $\mathcal{X}$  sont appelées fonctions de rectification. Elles sont de la forme  $\varphi(x, y) = a'x + ay + c$ .

On doit se poser un problème en quelque sorte inverse. Soit une droite  $D$  dans  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ;  $j$  une paramétrisation de la droite affine  $D$  (donc  $j \circ j_1^{-1}$  (ou  $j \circ j_2^{-1}$ ) est affine). Est-ce que  $j$  est la restriction à  $D$  d'une fonction de rectification de la famille  $\mathcal{X}$  ?

Supposons  $D = \{ (x, y) \mid \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \ \beta \neq 0 \}$  d'où  $j \circ j_1^{-1} : \mathbf{R} \times \mathbf{R}$  est affine.

$$\text{Or } j_1^{-1}(x) = \left( x, -\frac{1}{\beta}(\alpha x + \gamma) \right) \text{ et } j \circ j_1^{-1}(x) = ux + v \ (u, v \in \mathbf{R}).$$

Si  $j$  est la restriction à  $D$  de  $\varphi$  où  $\varphi(x, y) = a'x + ay + c$ , on doit avoir :

$$ux + v = \varphi \left( x, -\frac{1}{\beta}(\alpha x + \gamma) \right) = a'x - \frac{a}{\beta}(\alpha x + \gamma) + c$$

$$\text{d'où: } \begin{cases} u = a' - \frac{a\alpha}{\beta} \\ v = c - \frac{a\gamma}{\beta} \end{cases} \quad \text{ou encore: } \begin{cases} \beta a' - \alpha a = \beta u \\ \beta c - \gamma a = \beta v \end{cases}$$

qui permettent de calculer  $a, a', c$  mais sans unicité de la solution ( $a$  peut être choisi arbitrairement).

Toutes les paramétrisations admissibles pour une droite  $D$  s'obtiennent comme restrictions de fonctions de rectification.

*Deux types de problèmes.*

On se trouvera confronté à deux types de problèmes :

1. Ceux qui seront exclusivement posés en termes de support. Détermination d'un support de droite contenant deux points donnés. Intersection de deux droites.
2. Ceux dans lesquels les paramétrisations des droites interviennent. Il peut arriver que les résultats obtenus ne requièrent pas de précision sur les paramétrisations (th. de Thalès ci-dessous) mais il peut arriver que les résultats quoiqu'exprimant des propriétés affines nécessitent une certaine « unité » dans les paramétrisations (th. des tubes de parallèles).

*Détermination d'un support de droite contenant deux points.*

Soient dans  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$  les points  $A : (x_1, y_1)$ ,  $B : (x_2, y_2)$ .

Si  $A$  et  $B \in D = \{ (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \}$  on doit avoir :

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma = 0 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 + \gamma = 0 \end{cases}$$

système homogène de deux équations à trois inconnues donc qui a toujours au moins une solution.

Si  $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ , toutes les solutions se déduisent de l'une d'entre elles  $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$  par multiplication par une constante quelconque. Comme par ailleurs  $\lambda \alpha_0 x + \lambda \beta_0 y + \lambda \gamma_0 = 0$  et  $\alpha_0 x + \beta_0 y + \gamma_0 = 0$  définissent le même support de droite il y a donc une droite unique dans  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$  contenant  $A$  et  $B$ .

- \* Remarquer que dans une classe de seconde il est préférable de séparer les cas  $x_1 = x_2$  et  $x_1 \neq x_2$ , en écrivant la relation de définition du support de  $D$  sous la forme  $y = \alpha'x + \beta'$ .
- \* L'unicité peut aussi résulter de l'étude suivante sur l'intersection de deux droites.

*Intersection de deux droites.*

Soient

$D = \{ (x, y) \mid \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \}$  et  $D' = \{ (x, y) \mid \alpha'x + \beta'y + \gamma' = 0 \}$   
deux droites de  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ .

Soit à déterminer  $(x, y) \in D \cap D'$ . Si  $(x, y)$  existe  $(x, y) \in D \cap D'$

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' = 0, \end{cases}$$

système de deux équations non homogènes à deux inconnues.

Le système a une solution unique sauf si  $\alpha\beta' - \beta\alpha' = 0$ . Si dans ce dernier cas  $\alpha\gamma' - \gamma\alpha' \neq 0$ , le système n'a pas de solution. Si  $\alpha\beta' = \beta\alpha'$  et  $\alpha\gamma' = \gamma\alpha'$ , tout couple  $(x, y)$  vérifiant l'une des relations vérifie l'autre, c'est-à-dire  $D = D'$ .

**Théorème 2.** Deux droites distinctes ont une intersection soit vide soit constituée par un seul point.

*Corollaire :* Deux droites distinctes ne pouvant avoir plus d'un point commun, deux droites qui ont plus d'un point commun ne sont pas distinctes.

Le problème d'unicité posé par la détermination d'une droite contenant deux points donnés, se trouve résolu: deux points distincts déterminent une droite unique qui les contient.

*Expression résolue :* Si  $\alpha\beta' - \beta\alpha' \neq 0$  le point d'intersection des deux droites  $D$  et  $D'$  est:

$$\left( \frac{-\gamma\beta' + \gamma'\beta}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}, \frac{-\gamma'\alpha + \gamma\alpha'}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} \right)$$

*Droites parallèles.*

On dit que deux droites distinctes qui ont une intersection vide sont parallèles. Deux droites déterminées par  $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$  d'une part, et  $\alpha' x + \beta' y + \gamma' = 0$  d'autre part, sont parallèles  $\Leftrightarrow \alpha\beta' = \alpha'\beta$  (on est conduit à considérer qu'une droite est parallèle à elle-même).

La relation pour deux droites d'être parallèles est une relation d'équivalence toujours en considérant qu'une droite est parallèle à elle-même:

Soient

$$D = \{ (x, y) \mid \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \}, \quad D^1 = \{ (x, y) \mid \alpha' x + \beta' y + \gamma' = 0 \},$$

et

$$D'' = \{ (x, y) \mid \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' = 0 \}.$$

$D$  parallèle à  $D'$   $\Leftrightarrow \alpha\beta' = \alpha'\beta$  d'où  $D'$  est parallèle à  $D$ , et  $D$  parallèle à  $D$ .

Si  $D$  parallèle à  $D'$  et  $D'$  parallèle à  $D''$  on a:  $\alpha\beta' = \alpha'\beta$  et  $\alpha'\beta'' = \alpha''\beta'$ ; l'un des nombres  $\alpha'$  ou  $\beta'$  est  $\neq 0$ ; si  $\alpha' \neq 0$ , on a  $\alpha\alpha'\beta'' = \alpha\alpha''\beta' =$

$= \alpha''\alpha'\beta$ , d'où  $\alpha\beta'' = \alpha''\beta$ ; si  $\alpha' = 0$  d'où  $\beta' \neq 0$ ,  $\alpha\beta' = 0$  d'où  $\alpha = 0$  et  $\alpha''\beta' = 0$  d'où  $\alpha'' = 0$  et  $\alpha\beta'' = \alpha''\beta$ .

**Théorème 3.** Soit  $D = \{ (x, y) \mid \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \}$  une droite dans  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ; soit  $(x_0, y_0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ .  $\Rightarrow \exists$  une droite unique  $D'$  parallèle à  $D$  avec  $(x_0, y_0) \in D'$ .

Si une telle droite  $D' = \{ (x, y) \mid \alpha'x + \beta'y + \gamma' = 0 \}$  existe, on doit avoir:

$$\begin{cases} \alpha'\beta - \beta'\alpha = 0 \\ \alpha'x_0 + \beta'y_0 = -\gamma' \end{cases}$$

qui a pour solution  $\alpha' = \alpha$ ,  $\beta' = \beta$ ,  $\gamma' = -\alpha x_0 - \beta y_0$ .

L'unicité résulte du fait suivant: s'il existe  $D''$  parallèle à  $D$  avec  $(x_0, y_0) \in D''$ , on aurait  $D'$  et  $D''$  parallèles qui auraient un point commun, ce qui a lieu  $\Leftrightarrow D' = D''$ .

#### *Direction de droite.*

Une direction de droite est une classe d'équivalence de droites parallèles.  
Deux droites

$D = \{ (x, y) \mid \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \}$  et  $D' = \{ (x, y) \mid \alpha'x + \beta'y + \gamma' = 0 \}$  appartiennent à la même direction

$$\Leftrightarrow \exists k \neq 0 \text{ tel que } \alpha' = k\alpha \text{ et } \beta' = k\beta$$

de sorte que

$$D' = \left\{ (x, y) \mid \alpha x + \beta y + \frac{1}{k} \gamma' = 0 \right\}.$$

#### *Théorème de Thalès.*

**Théorème 4.** Soient  $D_1, D_2, D_3$  trois droites parallèles,  $A_1, A_2, A_3$  leurs points d'intersection respectifs avec une droite  $\Delta$ .

Le rapport (sur  $\Delta$ )  $\frac{\overline{A_1A_3}}{\overline{A_1A_2}}$  ne dépend pas de la droite  $\Delta$ .

Remarquons que le rapport des mesures algébriques de deux segments orientés sur une même droite ne dépend pas de la paramétrisation de cette droite, dans une même classe affine de paramétrisations (proposition 2.1. Droite).

Dans ces conditions le rapport  $\frac{\overline{A_1 A_3}}{A_1 A_2}$  peut être évalué soit avec  $j_1$  soit avec  $j_2$ . Etant donnés les rôles symétriques joués par  $j_1$  et  $j_2$  on peut supposer que  $\Delta$  est paramétrée par  $j_1$ . En se référant à l'expression résolue du point d'intersection de deux droites avec:

$$\Delta = \{ (x, y) \mid \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \} \quad (\beta \neq 0)$$

et

$$D_i = \{ (x, y) \mid ax + by + c_i = 0 \} \quad (i=1, 2, 3)$$

(voir droites  $\in$  une même direction),  
on obtient

$$A_i = (x_{A_i}, y_{A_i}) \quad \text{avec} \quad x_{A_i} = \frac{-\gamma b + c_i \beta}{\alpha b - \beta a}$$

Remarquer que  $D_i$  coupant effectivement  $\Delta$  on a  $\alpha b - \beta a \neq 0$ ; on a supposé  $\beta \neq 0$  de sorte que l'on peut poser  $u = -\frac{\alpha}{\beta} v = -\frac{\gamma}{\beta}$ ,

d'où

$$x_{A_i} = -\frac{vb + c_i}{ub + a}$$

d'où

$$x_{A_3} - x_{A_1} = \frac{C_3 - C_1}{ub + a}$$

d'où

$$\frac{\overline{A_1 A_3}}{\overline{A_1 A_2}} = \frac{C_3 - C_1}{C_2 - C_1} \text{ indépendant de la droite } \Delta$$

*Théorème des tubes de parallèles.*

**Théorème 5.** Soient dans  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$  deux paires de droites parallèles  $\{ D_1, D_2 \}$  d'une part,  $\{ \Delta, \Delta' \}$  d'autre part.  $D_1$  et  $D_2$  étant paramétrées par les restrictions d'une même fonction de rectification, les mesures algébriques des segments découpés par  $\Delta$  et  $\Delta'$  sur  $D_1$  et  $D_2$  sont égales.

Soient

$$A_1 = D_1 \cap \Delta, \quad A'_1 = D_1 \cap \Delta', \quad A_2 = D_2 \cap \Delta, \quad A'_2 = D_2 \cap \Delta'.$$

Soient

$$D_i = \{ (x, y) \mid ax + by + c_i = 0 \} \quad i = 1, 2.$$

$$\Delta = \{ (x, y) \mid \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \},$$

$$\Delta' = \{ (x, y) \mid \alpha x + \beta y + \gamma' = 0 \},$$

et soit  $\varphi : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  la fonction de rectification  $\varphi(x, y) = ux + vy + w$ .

Il faut donc vérifier:  $\varphi(A'_1) - \varphi(A_1) = \varphi(A'_2) - \varphi(A_2)$ .

$$x_{A_1} = \frac{-\gamma b + c_1 \beta}{\alpha b - a \beta} \qquad y_{A_1} = \frac{-c_1 \alpha + \gamma a}{\alpha b - a \beta}$$

$$x_{A'_1} = \frac{-\gamma' b + c_1 \beta}{\alpha b - a \beta} \qquad y_{A'_1} = \frac{-c_1 \alpha + \gamma' a}{\alpha b - a \beta}$$

$$\varphi(A'_1) - \varphi(A_1) = \frac{ub(\gamma - \gamma')}{\alpha b - a \beta} + \frac{va(\gamma' - \gamma)}{\alpha b - a \beta} = \frac{ub + va}{\alpha b - a \beta} (\gamma' - \gamma)$$

Cette expression étant indépendante de  $c_1$  est évidemment la même pour  $\varphi(A'_2) - \varphi(A_2)$  d'où le théorème.

*Conséquences.*

### 1. Graphique d'un point.

Soient dans  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$  les deux droites  $\{0\} \times \mathbf{R}$  et  $\mathbf{R} \times \{0\}$  que l'on appelle axes de références. Le point  $(x_0, y_0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$  est l'intersection des deux droites  $\{x_0\} \times \mathbf{R}$  et  $\mathbf{R} \times \{y_0\}$  respectivement parallèles aux axes de références. Il résulte du théorème des tubes de parallèles que:

$$j_1(x_0, y_0) - j_1(0, y_0) = j_1(x_0, 0) - j_1(0, 0) = x_0$$

et cette propriété est fondamentale dans les représentations graphiques.

**2. Théorème 6.** Dans un triangle  $ABC$  toute parallèle au côté  $BC$  passant par le milieu de  $AB$  coupe  $AC$  en son milieu.

On peut démontrer ce théorème soit en utilisant le théorème des tubes de parallèles, soit le théorème de Thalès en faisant passer par  $A$  la parallèle au côté  $BC$ .

### 3. Le parallélogramme.

On appelle parallélogramme l'ensemble formé par deux paires de droites parallèles (et non toutes parallèles) et leurs quatre points d'intersection

appelés sommets. Les diagonales sont les droites joignant deux sommets non situés sur une même droite formant le parallélogramme.

**Théorème 7.** Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en un point qui est sur chacune d'elles le milieu du segment déterminé par les sommets.

Construisons la parallèle à la diagonale  $A_1A'_2$  passant par  $A_2$ . D'après le théorème des tubes de parallèles cette droite coupe  $\Delta'$  en  $A'_3$  et (sous réserve d'utiliser une même fonction de rectification dont les restrictions à  $\Delta$  et  $\Delta'$  sont  $j$  et  $j'$ ),  $\overline{A_2A'_3} = \overline{A_1A_2} = \overline{A'_1A'_2}$ .

$A'_2$  est donc le milieu de  $A'_1A'_3$ , et le théorème 6 appliqué au triangle  $A'_1A_2A'_3$  montre que  $A_1A'_2$  coupe  $A'_1A_2$  en son milieu.

#### 4. Projection du plan sur une droite parallèlement à une direction de droite.

Soit  $\Delta$  une droite du plan et  $\mathcal{D}$  une direction de droite. Soit  $A \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$  et  $D_A \in \mathcal{D}$  telle que  $A \in D_A$ .  $\Delta \cap D_A$  est un point appelé projection de  $A$  sur  $\Delta$  parallèlement à  $\mathcal{D}$ .

Remarquer que la projection sur  $\Delta$  parallèlement à  $\mathcal{D}$ , restreinte à une droite  $\Delta'$  conserve les rapports des mesures algébriques des segments (th. de Thalès).

#### *Le plan standard affine*

Soit  $(\mathbf{R} \times \mathbf{R}, \mathcal{S}_0)$  le plan standard affine et  $J \in \mathcal{S}_0$   
 $J : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ,  $J$  affinement équivalent à l'identité. D'où:

$$J(x, y) = (\alpha x + \beta y + \gamma, \alpha' x + \beta' y + \gamma'), \quad \alpha\beta' - \beta\alpha' \neq 0.$$

A priori deux familles de supports de droite peuvent être définies sur  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ .

- 1) La famille  $\mathcal{D} = \{ D = \{ (x, y) \mid \exists \text{ une correspondance affine entre } x \text{ et } y \} \}$
- 2) La famille des images inverses par  $J^{-1}$  des droites de  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ , c'est-à-dire les supports de droites obtenus sur  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$  par report de la famille des droites de  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ .

$$\mathcal{D}' = \{ D' = \{ (x, y) \mid \exists \text{ une correspondance affine entre } \alpha x + \beta y + \gamma \text{ et } \alpha' x + \beta' y + \gamma' \} \}.$$

Proposition 8.  $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$ .

Une correspondance affine entre  $\alpha x + \beta y + \gamma$  et  $\alpha'x + \beta'y + \gamma'$  est une correspondance affine entre  $x$  et  $y$  d'où  $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$ .

Inversement soit  $D \in \mathcal{D}$ ;  $D = \{ (x, y) \mid ux + vy + w = 0 \}$ ; existe-t-il  $u', v', w'$  tels que:

$$\forall x, y \quad u'(\alpha x + \beta y + \gamma) + v'(\alpha'x + \beta'y + \gamma') + w' = ux + vy + w?$$

$u', v', w'$  doivent vérifier:

$$\begin{cases} \alpha u' + \alpha' v' = u \\ \beta u' + \beta' v' = v \\ \gamma u' + \gamma' v' + w' = w \end{cases}$$

Ce système a une solution d'ailleurs unique sous la condition  $\alpha\beta' - \beta\alpha' = 0$  qui est réalisée.

$u', v', w'$  ainsi calculés établissent  $D \in \mathcal{D}'$  c'est-à-dire  $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$ .

Les fonctions de rectification de la famille  $\mathcal{D}'$  sont les fonctions  $\{ \varphi \circ J \}$  où  $\varphi$  parcourt la famille des fonctions de rectification de la famille  $\mathcal{D}$ , or  $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$  d'où il résulte que la famille des  $\varphi \circ J$  est la famille des fonctions  $\varphi$ .

### *Le Plan ( $\mathcal{P}; J$ )*

Soit  $\mathcal{P}$  un ensemble et  $J$  une bijection de  $\mathcal{P}$  sur  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ .

*Support de droite dans ( $\mathcal{P}, J$ ).*

$\Delta$  est un support de droite dans  $\mathcal{P} \Leftrightarrow J(\Delta)$  est un support de droite dans  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ .

Soit  $K$  affinement équivalent à  $J$ ;  $K \circ J^{-1} : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{R}$  est affine (non dégénérée)  $K(\Delta) = K \circ J^{-1}(J(\Delta))$ .  $J(\Delta)$  est un support de droite dans  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ,  $K \circ J^{-1}$  est affine, il résulte du paragraphe précédent que  $K(\Delta)$  est un support de droite  $\Leftrightarrow J(\Delta)$  est un support de droite.

Les droites sont donc définies dans  $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$  où  $\mathcal{S}$  est une classe de bijections affinement équivalentes de  $\mathcal{P}$  sur  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ .

Les fonctions de rectification de  $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$  sont les fonctions  $\varphi \circ J$  (où  $\varphi$  parcourt la famille  $\Phi$  des fonctions de rectification de  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ). Cette définition ne dépend pas de  $J$  dans  $\mathcal{S}$ : soit  $K \in \mathcal{S}$   $\varphi \circ K = \varphi \circ K \circ J^{-1} \circ J$  où  $\varphi \circ (K \circ J^{-1})$  parcourt  $\Phi$  lorsque  $\varphi$  parcourt  $\Phi$ .



Toutes les propriétés affines définies dans  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$  (définition des droites parallèles, théorème de Thalès, théorème des tubes de parallèles, parallélogramme, etc.) se reportent sans modification sur  $\mathcal{P}$ .

*Une généralisation*

Si au lieu de  $\mathbf{R}$  on utilise un corps  $\mathbf{R}$  ordonné d'une manière compatible avec la structure de corps il est possible de répéter mot pour mot la théorie qui a été faite au cours de ces deux chapitres et d'élaborer ainsi une géométrie affine sur un corps autre que  $\mathbf{R}$ .

*( Reçu le 6 novembre 1970 )*

L. Fourès  
700 Immeuble Le Corbusier  
Boulevard Michelet  
13 - Marseille (France)