

Montrons que tout 3-anneau est commutatif

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1971)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Remarque 1 :

- i) Dans A tout carré est idempotent ($a^4 = a^2$).
- On note B l'ensemble des idempotents.
- ii) $a^2 = 0$ est équivalent à $a = 0$
- iii) $4a = a$ pour tout $a \in A$.

MONTRONS QUE TOUT 3-ANNEAU EST COMMUTATIF

Pour tout $a \in A$, tout $\alpha \in B$, $a = 1.a = (1 - \alpha)a + \alpha a$ d'où: $\alpha\alpha = (1 - \alpha)\alpha\alpha + \alpha\alpha\alpha$

De $[(1 - \alpha)\alpha\alpha]^2 = 0$ on tire (Remarque 1, ii)] $\alpha\alpha - \alpha\alpha\alpha = 0$

De même $\alpha a - \alpha\alpha a = 0$

et par conséquent $\alpha a = a\alpha$: on dit que les idempotents de A sont centraux.

Ainsi on a: $a(a^2 + b)^2 = (a^2 + b)^2 a$ (Remarque 1, i))

Soit $a(a^2 + a^2 b + ba^2 + b^2) = (a^2 + a^2 b + ba^2 + b^2)a$

$$a + ab + aba^2 + ab^2 = a + a^2 ba + ba + b^2 a$$

$$2ab = 2ba$$

d'où (Remarque 1, iii)): $\boxed{ab = ba}$ tous a, b , dans A .

Remarque 2 :

B , ensemble des idempotents de A , muni de la somme: $\alpha \oplus \beta = \alpha + \beta + \alpha\beta$ et du produit $\alpha\beta$ (produit dans A) est un anneau booléen.

Le sup et le inf s'expriment avec les opérations dans A :

$$\begin{cases} \gamma \wedge \delta = \gamma\delta \\ \gamma \vee \delta = \gamma + \delta - \gamma\delta \end{cases}$$

Lemme 1 :

Pour tous a, b, c de A , l'expression:

$$(a - b)^2 \vee (b - c)^2,$$

est symétrique en a, b, c .

En effet: $(a - b)^2 = a^2 + b^2 + ab$ et par suite (remarque 2):

$$(a - b)^2 \vee (b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - a^2 b^2 - b^2 c^2 - c^2 a^2 - a^2 bc - b^2 ca - c^2 ab .$$

Propriété 1 :

L'application d de A^2 dans B (Remarque 2) définie par:

$$d(a, b) = (a - b)^2 .$$

est une distance (booléenne).

En effet:

i) $(a-b)^2 = 0$ ssi $(a-b) = 0$ (Remarque 1, ii))

ii) $(a-b)^2 = (b-a)^2$

iii) D'après le lemme 1 on a:

$(a-c)^2 \vee (c-b)^2 = (a-b)^2 \vee (b-c)^2$ et par conséquent:

$(a-c)^2 \leq (a-b)^2 \vee (b-c)^2$.

Remarque 3 :

De $d(a, b) = a^2 + b^2 + ab$ et $a^2 \vee b^2 = a^2 + b^2 - a^2 b^2$, on tire:

$$a^2 \vee b^2 = d(a, b) + e(a, b)$$

en posant: $e(a, b) = -ab - a^2 b^2$

$e(a, b)$ est idempotent et $e(a, b) \cdot d(a, b) = 0$

D'autre part: $a \cdot e(a, b) = b \cdot e(a, b) = -(a+b) \cdot e(a, b)$.

Définition 3 :

On appelle diamètre d'une partie E de A :

$$\left[\begin{array}{c} V \\ (e, f) \in E^2 \end{array} d(e, f) \right],$$

lorsque ce sup. existe (dans B).

Remarque 4 :

- i) Le diamètre d'une partie finie est toujours défini.
- ii) Si $E = \{ a, b \}$ le diamètre de E est la distance des points a et b .
- iii) Même pour E fini si $\text{Card } E \geq 3$ il n'existe pas nécessairement deux points a et b dans E pour lesquels $d(a, b) = \text{diamètre de } E$, car B n'est pas totalement ordonné.

Définition 4 :

Un cercle $\mathcal{C}_{(r, \rho)}$ de centre $r \in A$ et de rayon $\rho \in B$ est l'ensemble des points $m \in A$ tels que:

$$d(r, m) = \rho$$

Ainsi $m \in \mathcal{C}_{(r, \rho)}$ ssi: $(r-m)^2 = \rho$

multipliant successivement par ρr^2 , $\rho(1-r^2)$, $(1-\rho)r^2$, $(1-\rho)(1-r^2)$, il vient respectivement:

$$\begin{aligned} \rho r^2 m^2 + \rho r m &= 0 \\ \rho (1 - r^2) &= \rho (1 - r^2) m^2 \\ m (1 - \rho) r^2 &= (1 - \rho) r \\ m^2 (1 - \rho) (1 - r^2) &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit:

$$\boxed{\mathcal{C}_{(r,\rho)} = \{ m/m = (1 - \rho) r - \rho r \varepsilon + \rho (1 - r^2) n \}} \quad (1)$$

avec $\varepsilon \in B$ et n inversible dans A

Lemme 2 :

Pour tout $\alpha \in B$ il existe un unique idempotent sur le cercle $\mathcal{C}_{(\alpha,1)}$.

Pour tout a inversible dans A il existe un unique élément inversible sur le cercle $\mathcal{C}_{(a,1)}$.

En effet: $\mathcal{C}_{(a,1)} = \{ m/m = -a\varepsilon + (1 - \alpha) n \}$; m idempotent implique $\varepsilon = 0$ et $n = 1$ d'où $m = 1 - \alpha$

$\mathcal{C}_{(a,1)} = \{ m/m = -a\varepsilon \}$; m inversible implique $\varepsilon = 1$ d'où $m = -a$.

Propriété 2 :

Pour tout cercle le diamètre est égal au rayon.

Pour tout point d'un cercle il existe un unique point « diamétralement opposé ».

En effet:

Soient m_1 et m_2 sur le cercle $\mathcal{C}_{(r,\rho)}$: l'inégalité triangulaire entraîne: $d(m_1, m_2) \leq d(m_1, r) \vee d(r, m_2) = \rho$. On va montrer que ρ est atteint.

$$\begin{aligned} (m_1 - m_2) &= -\rho r [\varepsilon_1 - \varepsilon_2] + \rho (1 - r^2) [n_1 - n_2] \\ d(m_1, m_2) &= \rho [rd(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + (1 - r^2) d(n_1, n_2)] \end{aligned}$$

Fixons m_1 : d'après le lemme 2 il existe un unique ε_2 tel que $d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 1$ et un unique n_2 tel que $d(n_1, n_2) = 1$, donc un unique m_2 tel que $d(m_1, m_2) = \rho$.

Définition 5 :

i) a, b, c est un *triplet équilatéral* si $d(a, b) = d(b, c) = d(c, a)$.

On dira aussi: α -*triplet*, pour désigner un triplet équilatéral de distance commune α .

ii) a, b est un α -*biplet* si $d(a, b) = \alpha$.

De la propriété 2 on déduit les propriétés suivantes:

Propriété 3 :

Pour tout ρ -biplet m_1, m_2 de $\mathcal{C}_{(r, \rho)}$ (points « diamétralement opposés ») le triplet r, m_1, m_2 est équilatéral.

Propriété 4 :

Etant donné deux points il existe un unique triplet équilatéral les contenant.

Propriété 5 :

Pour tout biplet a, b , $\mathcal{C}_{(a, d(a, b))}$ et $\mathcal{C}_{(b, d(a, b))}$ ont un unique point commun.

Remarque 5 :

i) si $d(r_1, r_2) > \rho_1 \vee \rho_2$ alors $\mathcal{C}_{(r_1, \rho_1)} \cap \mathcal{C}_{(r_2, \rho_2)} = \phi$

ii) La formule (1) montre que :

$$\mathcal{C}_{(r(1-\rho), \rho(1-r^2))} \subset \mathcal{C}_{(r, \rho)}$$

Plus généralement on va montrer que :

Propriété 6 :

Si l'intersection de deux cercles $\mathcal{C}_{(r_1, \rho_1)}$ et $\mathcal{C}_{(r_2, \rho_2)}$ n'est pas vide elle est contenue dans un cercle de rayon $\rho_1 \cdot \rho_2$.

Soit $m \in \mathcal{C}_{(r_1, \rho_1)}$: il existe $\varepsilon \in B$ et n inversible dans A tels que :

$$m = (1 - \rho_1) r_1 - \rho_1 r_1 \varepsilon + \rho_1 (1 - r_1^2) n .$$

Maintenant on suppose $m \in \mathcal{C}_{(r_2, \rho_2)}$:

De $m = (1 - \rho_2) m + \rho_2 m = (1 - \rho_2) m + \rho_2 r_1 m + \rho_2 (1 - r_1) m$, on tire :

$$m = (1 - \rho_2) r_2 + \rho_2 (1 - \rho_1) r_1 + \rho_2 r_2^2 [-\rho_1 r_1 \varepsilon + \rho_1 (1 - r_1^2) n] + \rho_2 (1 - r_2^2) [-\rho_1 r_1 \varepsilon + \rho_1 (1 - r_1^2) n] ,$$

avec la condition : $\rho_1 \rho_2 (1 - r_1^2) r_2^2 n = -r_2 \rho_1 \rho_2 (1 - r_1^2)$. Cette formule du type (1) définit un cercle, qui contient $\mathcal{C}_{(r_1, \rho_1)} \cap \mathcal{C}_{(r_2, \rho_2)}$, et de rayon :

$$\rho_2 r_2^2 (\rho_1 r_1^2 + \rho_1 (1 - r_1^2)) + \rho_2 (1 - r_2^2) (\rho_1 r_1^2 + \rho_1 (1 - r_1^2)) ,$$

c'est-à-dire $\rho_1 \cdot \rho_2$.

Définition 6 :

Un disque $\mathcal{D}_{(s, \sigma)}$ de centre $s \in A$ et de rayon $\sigma \in B$ est l'ensemble des points $m \in A$ tels que :

$$d(s, m) \leq \sigma$$

Ainsi $m \in \mathcal{D}_{(s,\sigma)}$ ssi: $(s-m)^2 \leq \sigma$
 soit $(s-m)^2 (1-\sigma) = 0$ ou encore $(s-m) (1-\sigma) = 0$
 c'est-à-dire $m (1-\sigma) = s (1-\sigma)$

$$\mathcal{D}_{(s,\sigma)} = \{ m/m = (1-\sigma) s + \sigma t \} \quad \text{avec } t \in A \quad (2)$$

Définition 7 :

On appelle *cœur du disque* $\mathcal{D}_{(s,\sigma)}$ le point $s_0 = (1-\sigma) s$.
 On appelle *couronne du disque* $\mathcal{D}_{(s,\sigma)}$ le cercle $\mathcal{C}_{(s_0,\sigma)}$.

Propriété 7 :

Tout point d'un disque \mathcal{D} est centre de \mathcal{D} .

En effet: pour tous m_1, m_2 , de $\mathcal{D}_{(s,\sigma)}$:

$$d(m_1, m_2) \leq d(m_1, s) \vee d(m_2, s) \leq \sigma$$

Prenant le centre au cœur du disque:

$$\mathcal{D}_{(s_0,\sigma)} = \{ m/m = s_0 + \sigma t \}$$

m est dans la couronne ssi:

$$d(m, s_0) = \sigma t^2 = \sigma, \quad \text{c'est-à-dire } \sigma \leq t^2.$$

C'est toujours le cas si t est inversible.

Propriété 8 :

Tout disque \mathcal{D} de rayon σ peut être engendré par:

- i) La famille des cercles $\mathcal{C}_{(s,\gamma)}$ centrés en un point s fixe de \mathcal{D} et le rayon γ parcourant $[0, \sigma]$.
- ii) La famille des cercles $\mathcal{C}_{(r,\sigma)}$ dont le centre parcourt la couronne de \mathcal{D} et le rayon est σ .

La première famille: définition 6 et propriété 7.

La deuxième famille: puisque pour tout $m \in \mathcal{D}$, $\mathcal{C}_{(m,\sigma)} \subset \mathcal{D}$, il reste à montrer que pour $a \in \mathcal{D}$ il existe m de la couronne de \mathcal{D} tel que $a \in \mathcal{C}_{(m,\sigma)}$.
 Soit $a = s_0 + \sigma t$ et $m = s_0 + \sigma n$.

Si nous choisissons n inversible, m sera dans la couronne. Prenons $n = -t + (1-t^2)$. Alors $d(m, a) = \sigma (n-t)^2 = \sigma$. Cqfd

Propriété 9 :

Si l'intersection de deux disques n'est pas vide, c'est un disque dont le rayon est le produit des rayons.

En effet: soient \mathcal{D} et \mathcal{D}' de rayons respectifs σ et σ' et qui ont le point s en commun; prenons s comme centre commun: $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$ c'est l'ensemble des m tels que $d(s, m) \leq \sigma$ et $d(s, m) \leq \sigma'$ d'où $d(s, m) \leq \sigma\sigma'$.

Considérons la famille des disques contenant deux points a et b : ils admettent tous a pour centre; leur rayon est supérieur ou égal à $d(a, b)$.

Définition 8 :

Le disque $\mathcal{D}_{(a, d(a, b))}$ est dit *engendré par* les points a et b . On le note \mathcal{D}^{ab} . Ainsi, deux points d'un disque de rayon σ engendrent ce disque si leur distance est égale à σ (σ -biplet).

Remarque 6 :

Compte tenu de la remarque 3 le cœur du disque \mathcal{D}^{ab} est

$$s_0 = a \cdot e(a, b) = b \cdot e(a, b) = -(a + b) \cdot e(a, b)$$

Propriété 10 :

\mathcal{D}^{ab} est l'ensemble des points m tels que

$$d(a, m) \vee d(m, b) = d(a, b)$$

En effet: $m \in \mathcal{D}^{ab}$ implique $d(a, m) \vee d(m, b) \leq d(a, b)$ rayon du disque (Propriété 7): comme d'autre part on a l'inégalité triangulaire:

$$d(a, m) \vee d(m, b) \leq d(a, b),$$

l'égalité en résulte.

Maintenant si l'on a $d(a, m) \vee d(m, b) = d(a, b)$ on a aussi (lemme 1) $d(am) \vee d(ab) = d(a, b)$ d'où $d(a, m) \leq d(a, b)$ et donc $m \in \mathcal{D}_{(a, d(a, b))} = \mathcal{D}^{ab}$.

Définition 9 :

Etant donnés les points a, b et l'idempotent α , on appelle *médiateur de* (a, b) à l'ordre α et on note \mathcal{M}_α^{ab} l'ensemble des points m tels que $d(m, a) = \alpha d(m, b)$.

Pour $\alpha = 1$ on dit simplement médiateur de (a, b) et on note \mathcal{M}^{ab} .

Pour déterminer \mathcal{M}_α^{ab} on multiplie successivement $d(a, m) = \alpha \cdot d(b, m)$ par α et $(1 - \alpha)$; il vient respectivement:

$$\begin{aligned} \alpha(a^2 - b^2 + (a - b)m) &= 0 \\ (1 - \alpha)a &= (1 - \alpha)m \end{aligned}$$

m est donc nécessairement de la forme:

$$m = (1 - \alpha) a - \alpha d(a, b)(a + b) + \alpha(1 - d(a, b)) \cdot t \quad \text{avec} \quad t \in A.$$

Réciproquement tout m de cette forme vérifie $(1 - \alpha)m = (1 - \alpha)a$ et par conséquent $(m - a) = \alpha(m - a)$. On a donc :

$$\begin{aligned} (m - a)^2 - \alpha(m - b)^2 &= \alpha a^2 + \alpha a m - \alpha b^2 - \alpha b m \\ &= (a - b) [\alpha(a + b) d(a, b) + d(a, b) \alpha m] \\ &= (a - b) [\alpha(a + b) d(a, b) - \alpha d(a, b)(a + b)] = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{M}_\alpha^{ab} = \{ m / m = (1 - \alpha) a - \alpha d(ab)(a + b) + \alpha(1 - d(ab)) t \} \quad t \in A} \quad (3)$$

Propriété 11 :

Le médiateur de (a, b) à l'ordre α est un disque de rayon $\alpha(1 - d(a, b))$.

Remarque 7 :

Le médiateur \mathcal{M}^{ab} de (a, b) est :

$$\mathcal{M}^{ab} = \{ m / m = -(a + b) d(a, b) + (1 - d(a, b)) \cdot t \} \quad t \in A$$

Étudions $\mathcal{M}_\alpha^{ab} \cap \mathcal{D}^{ab}$, c'est-à-dire cherchons les points m du disque engendré par (a, b) tels que $d(a, m) = \alpha d(b, m)$:

- i) D'après la propriété 9, si cette intersection n'est pas vide c'est un disque de rayon nul donc un point.
- ii) $m = (1 + \alpha) a - \alpha b$ est un point de \mathcal{M}_α^{ab} ($t = -(a + b)$) ; c'est aussi un point de \mathcal{D}^{ab} puisque :

$$d(a, m) = \alpha \cdot d(a, b) \leq d(a, b)$$

Propriété 12 :

Il existe un point m et un seul, sur le disque engendré par a et b , tel que $d(a, m) = \alpha d(b, m)$, c'est :

$$i_\alpha = (1 + \alpha) a - \alpha b$$

Remarque 8 :

$$d(a, i_\alpha) = \alpha d(a, b) ; \quad d(b, i_\alpha) = d(a, b).$$

L'ensemble des points i_α , α décrivant B , est le cercle $\mathcal{C}_{(b, d(a, b))}$ puisque si m est un point de ce cercle $d(am) \leq d(ab)$ entraîne $d(a, m) = d(a, m)$, $d(ab)$ et $m = i_{d(a, m)}$.

On remarquera d'autre part que pour tout α , les points b et i_α engendrent \mathcal{D}^{ab} .

Remarque 9 :

Notant simplement i lorsque $\alpha=1$, $i = -(a+b)$

Définition 10 :

On appelle milieu de (a, b) le point i de \mathcal{D}^{ab} équidistant de a et b .

Propriété 13 :

Tout triplet de points dont l'un est le milieu des deux autres, est équilatéral.

Pour tout triplet équilatéral chaque point est le milieu des deux autres.

La première assertion résulte de la remarque 8 pour $\alpha=1$.

Maintenant soit (a, b, c) un triplet équilatéral: alors chaque point appartient au disque engendré par les deux autres.

Propriété 14 :

Pour tout $m \in \mathcal{M}^{ab}$ on a $d(a, i) \leq d(a, m)$

C'est-à-dire: $d(a, i)$ est la plus petite distance pour m parcourant le médiateur de (a, b) . En effet:

$$d(a, i) = d(a, b) \leq d(a, m) \vee d(m, b) = d(a, m)$$

On voit de plus en plus que si $d(a, i) = d(a, m)$ alors $m = i \dots$

Propriété 15 :

Quand ils sont distincts, les trois points d'un triplet équilatéral ne sont jamais cocycliques.

Soit a, i, b un triplet équilatéral et $\mathcal{C}_{(r, \rho)}$ un cercle circonscrit:

$$d(r, a) \leq d(r, i) \vee d(i, a) \Rightarrow d(r, a) \leq d(i, a)$$

ce qui est absurde (propriété 14) si les points sont distincts.

Remarque 10 :

Pour tout α -triplet a, b, c :

$$a + b + c = 0$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca = -\alpha$$

$$a - b = b - c = c - a$$

$$a^2 - b^2 - c^2 = -bc \dots etc \dots$$

$$a - b - c = -a \dots etc \dots$$

$$a^2 - bc = \alpha \dots etc \dots$$

Comme le montre la remarque 9.

Propriété 16 :

Pour tous a, b l'ensemble des points m tels que $d(a, m) \cdot d(b, m) = 0$ est le cercle $\mathcal{C}_{(i, d(a, b))}$ avec i milieu de a, b .

Procédons par équivalences:

$$\begin{aligned} d(a, m) \cdot d(b, m) &= 0 \\ (a - m)^2 \cdot (b - m)^2 &= 0 \\ (a - m) \cdot (b - m) &= 0 \\ m^2 - am - bm + ab &= 0 \\ m^2 + m(-a - b) &= a^2 + a(-a - b) \end{aligned}$$

i milieu de a, b , et $i^2 + m^2 + mi = i^2 + a^2 + ai$

$$d(i, m) = d(i, a) = d(a, b).$$

Définition 11 :

Une partie E de A est une *base métrique* si pour tous a, b de A :

$$d(a, e) = d(b, e) \text{ pour tout } e \in E \text{ implique } a = b$$

Remarque 11 :

Il n'existe pas de base métrique à un élément.

Si $e = 0$, $d(a, e) = d(-a, e)$ et $a \neq -a$ pour $a \neq 0$.

Si $e \neq 0$, $d(0, e) = d(-e, e)$.

La définition 11 peut s'interpréter ainsi: E est une base métrique si pour tous a, b , de A :

$$\ll E \subset \mathcal{M}^{ab} \text{ implique } a = b \gg$$

Comme le diamètre de \mathcal{M}^{ab} est $[1 - d(a, b)]$ (propriété 11), on voit que si le diamètre de E est 1 alors E est une base métrique. Nous avons là une condition suffisante ¹⁾.

Considérons une partie E de A Card $E \geq 2$ vérifiant l'hypothèse: il existe un idempotent β non nul tel que pour tout $(e, f) \in E^2$, $\beta \cdot d(e, f) = 0$. Alors $\beta e = \beta f$. Pour e choisi dans E on a:

¹⁾ La condition nécessaire et suffisante est la suivante:
Soit $X = \text{Spec } B$ le dual de B et ω_{ab} l'of associé canoniquement à $d(a, b)$. On pose $\Omega = \bigcup_{(e, f) \in E^2} \omega_{ef}$.
 E est une base métrique ssi Ω est dense dans X . On remarquera que $d(a, e) = d(b, e)$ et $d(a, f) = d(b, f)$ impliquent $d(a, b) \cdot d(e, f) = 0$ c'est-à-dire $\omega_{ab} \cap \omega_{ef} = \emptyset \dots$

$$d(0, f) = d(-\beta e, f) \text{ pour tout } f \in E$$

ce qui montre que E n'est pas une base métrique si $\beta e \neq 0$.

Envisageons donc le cas où pour tout $e \in E$, $\beta e = 0$:

$$d(\beta, e) = d(-\beta, e) \text{ pour tout } e \in E$$

ce qui montre encore que E n'est pas une base métrique.

On suppose maintenant que E est fini; le diamètre de E existe toujours dans ce cas et s'il n'est pas égal à 1 nous sommes dans l'hypothèse précédente ($\beta \dots$)

Propriété 17 :

Une partie E de A , ayant n éléments; $n \geq 2$, est une base métrique ssi le diamètre de E est 1.

Soit $E = \{e_1, e_2\}$ avec $d(e_1, e_2) = 1$: E est une base métrique. Tout point a est caractérisé par les deux idempotents $d(a, e_1)$, $d(a, e_2)$. On a :

$$d(a, e_1) - d(a, e_2) = e_1^2 - e_2^2 + a(e_1 - e_2)$$

d'où :

$$a = -(e_1 + e_2) + (e_1 - e_2)(d(a, e_1) - d(a, e_2)) \quad (4)$$

En particulier on pourra choisir e_1, e_2 , parmi 0, 1, 2. $d(a, 0) = a^2$; $d(a, 1) = a^2 + a + 1$; $d(a, 2) = a^2 - a + 1$. Le choix: $e_1 = 1$, $e_2 = 2$, annule $(e_1 + e_2)$ dans la formule (4). Posant $\delta_1(a) = a^2 + a + 1$ et $\delta_2(a) = a^2 - a + 1$ il vient :

$$a = -\delta_1(a) + \delta_2(a) \quad (4 \text{ bis})$$

Posons $\varepsilon_1(a) = 1 - \delta_1(a) = -a - a^2$; $\varepsilon_2(a) = 1 - \delta_2(a) = a - a^2$. Les idempotents $\varepsilon_1(a)$, $\varepsilon_2(a)$ sont orthogonaux et :

$$a = -\delta_1(a) + \delta_2(a) = (1 - \delta_1(a)) - (1 - \delta_2(a)) = \varepsilon_1(a) - \varepsilon_2(a).$$

Réciproquement soient α et β deux idempotents orthogonaux tels que $a = \alpha - \beta$.

Il vient $a^2 = \alpha + \beta$ d'où $\begin{cases} \alpha = -a - a^2 = \varepsilon_1(a) \\ \beta = a - a^2 = \varepsilon_2(a). \end{cases}$

Propriété 18 :

Pour tout $a \in A$ il existe un couple unique d'idempotents orthogonaux $\varepsilon_1(a)$, $\varepsilon_2(a)$, tels que :

$$a = \varepsilon_1(a) - \varepsilon_2(a)$$

Définition 12 :

i) On appelle *contraction* une application T de A dans A telle que pour tous a, b , de A :

$$d(T(a), T(b)) \leq d(a, b)$$

ii) On appelle *isométrie* une application de A dans A qui conserve les distances.

iii) On appelle *translation* et on note $\mathcal{C}_v, v \in A$, l'application de A dans $A: m \rightarrow m + v$.

Remarque 12 :

i) L'ensemble des contractions (resp: des isométries; resp: des translations) est stable pour la composition des applications de A dans A .

ii) Toute isométrie est une contraction.

iii) Toute translation est une isométrie.

Soit T' une contraction: $T = \mathcal{C}_{-T'(0)} \circ T'$ est une contraction: $T(a) = T'(a) - T'(0)$; elle laisse 0 fixe.

Etudions les contractions T à 0 fixe ¹⁾:

$$\begin{cases} T(0) = 0 \\ d(T(a), T(b)) \leq d(a, b) \end{cases}$$

$T^2(a) = d(T(0), T(a)) \leq d(0, a) = a^2$, d'où pour $\alpha \in B$: $T^2(\alpha a) \leq (\alpha a)^2 \leq \alpha$ ce qui implique $T(\alpha a) = \alpha \cdot T(a)$

Par suite $(T(\alpha a) - \alpha \cdot T(a))^2 = \alpha \cdot d(T(\alpha a), T(a)) \leq \alpha \cdot d(\alpha a, a) = 0$ d'où

$$T(\alpha a) = \alpha \cdot T(a)$$

D'autre part:

$$\begin{aligned} (T(a+b) - T(a) - T(b))^2 &\leq d(T(a+b), T(a)) \vee T^2(b) \\ &\leq d(a+b, a) \vee T^2(b) \\ &\leq b^2 \end{aligned}$$

Comme a et b jouent des rôles analogues, cette expression est inférieure ou égale à $a^2 \cdot b^2$ et par conséquent:

$$a \cdot b = 0 \Rightarrow T(a+b) = T(a) + T(b)$$

¹⁾ $T^2(a)$ représente le carré de l'élément $T(a)$ de A ; c'est encore $d(0, T(a))$.

Appliquons maintenant la propriété 18:

$$T(a) = \varepsilon_1(a) \cdot T(1) + \varepsilon_2(a) \cdot T(2)$$

$$\text{d'où: } T(a) = a(T(2) - T(1)) + a^2(-T(2) - T(1))$$

Montrons que réciproquement toute transformation T :

$$T(a) = wa^2 + ua + v; \quad v, u, w \text{ dans } A,$$

est une contraction:

$$\begin{aligned} d(T(a), T(b)) &= [w(a^2 - b^2) + u(a - b)]^2 = \\ &= d(a, b) \cdot [w(a + b) + u]^2 \leq d(a, b) \end{aligned}$$

Propriété 19 :

Les contractions sont les transformations de la forme $m \rightarrow wm^2 + um + v$; v, u, w étant des éléments de A .

ASPECT MATRICIEL

Soit T une contraction à 0 fixe: $T(m) = \varepsilon_1(m) \cdot T(1) + \varepsilon_2(m) \cdot T(2)$.

Appliquons la propriété 18 à $T(1)$ et $T(2)$

$$T(1) = \theta_{11} - \theta_{12}$$

$$T(2) = \theta_{21} - \theta_{22}$$

On obtient:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1(T(m)) \\ \varepsilon_2(T(m)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_1(m) \\ \varepsilon_2(m) \end{pmatrix}$$

la matrice $\begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_{11} & \theta_{21} \\ \theta_{12} & \theta_{22} \end{pmatrix}$ étant à coefficients dans B avec les éléments de chaque colonne orthogonaux.

Réciproquement une matrice $\begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$ définit une application de A dans A pourvu que les deux éléments de $\begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_1(m) \\ \varepsilon_2(m) \end{pmatrix}$ soient orthogonaux ce qui impose l'orthogonalité des éléments de chaque colonne pour $\begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$. On se ramène alors à la forme $wm^2 + um$ ce qui montre que la transformation définie par $\begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$ est une contraction.

Propriété 20 :

Les contractions à 0 fixe sont définies par les matrices $\begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$ à coefficients dans B orthogonaux pour chaque colonne.

Supposons que $m \rightarrow wm^2 + um + v$ soit une isométrie. L'appliquant au 1-triplet 0, 1, 2 on en tire les conditions nécessaires: