Aspect matriciel

Appliquons maintenant la propriété 18:

$$T(a)=\varepsilon_1(a)\cdot T(1)+\varepsilon_2(a)\cdot T(2)$$

d'où: $T(a)=a\left(T(2)-T(1)\right)+a^2\left(-T(2)-T(1)\right)$

Montrons que réciproquement toute transformation T:

$$T(a)=wa^2+ua+v\ ;\ v, u, w \text{ dans } A\ ,$$

est une contraction:

$$\begin{aligned} d\left(T(a), T(b)\right) &= \left[w\left(a^2-b^2\right)+u\left(a-b\right)\right]^2 = \\ &= d(a, b)\cdot\left[w(a+b)+u\right]^2 \leqq d(a, b) \end{aligned}$$

Propriété 19 :

Les contractions sont les transformations de la forme $m\rightarrow wm^2+$ $+um+v$; v, u, w étant des éléments de A.

Aspect matriciel

Soit T une contraction a 0 fixe: $T(m)=\varepsilon_1(m)\,.\,T(1)+\varepsilon_2(m)\,.\,T(2)$.
Appliquons la propriété 18 à $T(1)$ et $T(2)$

$$\begin{aligned} T(1)&=\theta_{11}-\theta_{12} \\ T(2)&=\theta_{21}-\theta_{22} \end{aligned}$$

On obtient:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1\left(T(m)\right) \\ \varepsilon_2\left(T(m)\right) \end{pmatrix} = \genfrac{}{}{0pt}{}{\square}{\square}\cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_1(m) \\ \varepsilon_2(m) \end{pmatrix}$$

la matrice $\genfrac{}{}{0pt}{}{\square}{\square} = \begin{pmatrix} \theta_{11} & \theta_{21} \\ \theta_{12} & \theta_{22} \end{pmatrix}$ étant à coefficients dans B avec les éléments de chaque colonne orthogonaux.

Réciproquement une matrice $\genfrac{}{}{0pt}{}{\square}{\square}$ définit une application de A dans A pourvu que les deux éléments de $\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{\square}{\square}\,.\,\binom{\varepsilon_1(m)}{\varepsilon_2(m)}\right]$ soient orthogonaux ce qui impose l'orthogonalité des éléments de chaque colonne pour $\genfrac{}{}{0pt}{}{\square}{\square}$. On se ramène alors à la forme wm^2+um ce qui montre que la transformation définie par $\genfrac{}{}{0pt}{}{\square}{\square}$ est une contraction.

Propriété 20 :

Les contractions à 0 fixe sont définies par les matrices $\genfrac{}{}{0pt}{}{\square}{\square}$ à coefficients dans B orthogonaux pour chaque colonne.

Supposons que $m\rightarrow wm^2+um+v$ soit une isométrie. L'appliquant au 1-triplet 0, 1, 2 on en tire les conditions nécessaires:

$$(w+u)^2=(-w+u)^2=u^2=1$$

c'est-à-dire $w=0$ et $u^2=1$.
Réciproquement toute contraction $m \to um+v$ avec $u^2=1$ conserve les distances.

Propriété 21 :

Les isométries sont les transformations de la forme:

$$m \to um+v; \text{ avec } v,\ u \text{ dans } A \text{ et } u^2=1\ .$$

Aspect matriciel

On a une isométrie a point 0 fixe ssi $\begin{smallmatrix}\square\\ \square\end{smallmatrix}$ est inversible. D'ailleurs d'après la propriété 21 elle doit être involutive. Elle est nécessairement de la forme $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \alpha\end{smallmatrix}\right)$ avec $\alpha+\beta=1$ et $\alpha\beta=0$.

Propriété 22 :

Les isométries à 0 fixe sont définies par les matrices $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \alpha\end{smallmatrix}\right)$ avec α, β idempotents tels que $\alpha\beta=0$; $\alpha+\beta=1$.

Remarque 13 :

L'isométrie $m \to um$ étant associée à la matrice $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \alpha\end{smallmatrix}\right)$, on a: $u=\alpha-\beta$.

Lemme : 3

L'ensemble des points m pour lesquels $\varepsilon_1(m)=\gamma$, γ fixé, est le cercle $\mathscr{C}_{(1,(1-\gamma))}$.
En effet:

$$1-\gamma=1-\varepsilon_1(m)=\delta_1(m)=d(1,m)$$

Propriété 23 :

Pour tous α, β, γ, de B tels que $\alpha\beta=0$ et $\alpha+\beta=1$, l'ensemble des points m vérifiant:

$$\alpha\ .\ \varepsilon_1(m)+\beta\ .\ \varepsilon_2(m)=\gamma\ ;$$

est le cercle de centre $u=\alpha-\beta$ et de rayon $(1-\gamma)$.

Compte tenu de la remarque 13, l'ensemble des points m considéré se déduit par l'isométrie $m'=um$, de l'ensemble des points m' pour lesquels $\varepsilon_1(m')=\gamma$; d'après le lemme 3 c'est donc un cercle de rayon $(1-\gamma)$ et de centre u image de 1.