1. GÉNÉRALITÉS

VUE D'ENSEMBLE SUR LA THÉORIE DES PLANS ÉQUILIBRÉS

par G. Heuzé

0. Introduction

Les plans équilibrés (on dit aussi plans en blocs incomplets équilibrés) sont apparus sous leur forme actuelle vers 1939. Mais depuis longtemps on s'intéressait à certains problèmes d'algèbre combinatoire qui sont des cas particuliers de plans équilibrés (par exemple les plans affines et projectifs finis). Le présent papier se propose de présenter la théorie en énonçant les principaux résultats.

Après le paragraphe 1 consacré aux généralités (définitions, exemples classiques et résultats fondamentaux) le paragraphe 2 fait le point sur la question de l'existence des plans équilibrés, question qui n'est encore que très partiellement résolue.

Le paragraphe 3 enfin donne les quelques résultats actuellement connus concernant le nombre de plans équilibrés ayant des paramètres donnés. Il s'agit là d'un problème qu'on commence tout juste à aborder...

Certains ouvrages récents développent largement cette théorie: [1], [3] et surtout [2] dans lequel on trouvera les démonstrations des résultats énoncés sans référence bibliographique. Par ailleurs [1] donne une bibliographie très complète concernant les articles antérieurs à 1968.

1. Généralités

1.1. *Définition.* — Un *plan équilibré* (nous dirons le plus souvent plan) sur un ensemble fini E ($|E|=v$) est constitué d'une famille (B_j) $(j=1, \ldots, b)$ de parties de E (appelées *blocs*) telles que

(A 1) pour tout $j = 1, \ldots, b$, $|B_j|$ est constant $(=k)$,

(A'2) pour tout couple (x, y) d'éléments distincts de E, le nombre de blocs contenant x et y est constant $(=\lambda)$,

$1 \leq \lambda$ et $k \leq v - 2$.

1.2. Nous en déduisons immédiatement la proposition:

(A'1) *pour tout* $x \in E$ *le nombre de blocs contenant* x *est constant* $(=r)$.

En effet, désignons par r_x le nombre de blocs contenant x et dénombrons de deux façons différentes les couples (y, B) vérifiant $x \in B$ et $y \in B$. On obtient $r_x(k-1) = (v-1)\lambda$, d'où le résultat.

1.3. *Les paramètres v, b, r, k, λ d'un plan équilibré* (nous noterons désormais $[v, b, r, k, \lambda]$ un tel plan) *vérifient*

$$\begin{cases} b\,k = r\,v \\ \lambda\,(v-1) = r\,(k-1) \end{cases}$$

Nous venons de montrer la deuxième égalité. La première s'obtient en dénombrant de deux façons différentes les couples (x, B) vérifiant $x \in B$.

1.4. Exemples:

— Sur $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ on définit un $[7, 7, 3, 3, 1]$ en prenant pour blocs: $\{1, 2, 4\}$, $\{2, 3, 5\}$, $\{3, 4, 6\}$, $\{4, 5, 7\}$, $\{5, 6, 1\}$, $\{6, 7, 2\}$, $\{7, 1, 3\}$

— Sur $E = P_n(F_q)$ (resp. $(F_q)^n$), espace projectif (resp. affine) de dimension n sur le corps fini F_q d'ordre q, on définit, en prenant pour blocs les variétés linéaires de dimension h ($1 \leq h \leq n-1$), un $[N(o, n), N(h, n), P(h, o), N(o, h), P(h, 1)]$ (resp. $[q^n, N(h, n) - N(h, n-1), P(h, o), q^h, P(h, 1)]$) avec, pour $h \leq k$,

$$N(h, k) = \frac{(1+q+\ldots+q^k)(q+\ldots+q^k)\ldots(q^h+\ldots+q^k)}{(1+q+\ldots+q^h)(q+\ldots+q^h)\ldots(q^h)}$$

$$P(k, h) = \frac{(q^{h+1}+q^{h+2}+\ldots+q^n)(q^{h+2}+\ldots+q^n)\ldots(q^k+\ldots+q^n)}{(q^{h+1}+q^{h+2}+\ldots+q^k)(q^{h+2}+\ldots+q^k)\ldots(q^k)}$$

— Un plan affine (resp. projectif) fini d'ordre n (arguésien ou non) est un $[n^2, n^2+n, n+1, n, 1]$ (resp. $[n^2+n+1, n^2+n+1, n+1, n+1, 1]$).

1.5. *Définition.* — On appelle *matrice d'incidence* d'un $[v, b, r, k, \lambda$ la matrice $A = (a_{ij})$ à v lignes et b colonnes définie par

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x_i \in B_j \\ 0 & \text{si} \quad x_i \notin B_j \end{cases}$$

1.6. On montre le théorème:

Pour qu'une matrice de 0 *et de* 1 *à v lignes et b colonnes soit la matrice d'incidence d'un* $[v, b, r, k, \lambda]$ *il faut et il suffit que*

$$\begin{cases} A\,A^t = (r-\lambda)\,I_v + \lambda\,J_v \\ J_v\,A = k\,J_{vb} \end{cases}$$

(où J_v (resp. J_{vb}) est la matrice carrée d'ordre v (resp. à v lignes et b colonnes) dont tous les éléments sont égaux à 1).

1.7. On montre le théorème (inégalité de FISHER):

Dans un $[v, b, r, k, \lambda]$ *on a* $b \geqq v$ (donc $r \geqq k$).

1.8. *Définition.* — On appelle *plan symétrique* un plan pour lequel $v = b$ (donc $r = k$) et on écrira $[v, k, \lambda]$ au lieu de $[v, v, k, k, \lambda]$.

1.9. On montre le théorème:

Si A est la matrice d'incidence d'un plan symétrique, A^t *est aussi la matrice d'incidence d'un plan* (naturellement symétrique).

1.10. On en déduit par dualité le corollaire:
dans un plan symétrique on a la propriété

(A 2) *Quels que soient les blocs distincts* B_j *et* B_l, $|B_j \cap B_l|$ *est constant* $(= \lambda)$.

1.11. *Remarque.* — Enonçons les propriétés (An) et ($A'n$):

(An) Quels que soient les parties $B_{j_1}, \ldots, B_{j_n}$ de E deux à deux distinctes, $|B_{j_1} \cap \ldots \cap B_{j_n}|$ est constant.

($A'n$) Quels que soient les éléments $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ de E deux à deux distincts, le nombre des parties contenant à la fois $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ est constant.

On montre ([1]):

(A 1) et ($A'n$) entraînent ($A'2$), ..., ($A'n-1$) (nous l'avons vérifié pour $n=2$)

($A'1$) et (An) entraînent (A 2), ..., ($An-1$).

Si un objet vérifiant ($A1$), ..., (Am), ($A'1$), ..., ($A'n$) est non trivial alors nécessairement: soit $m = 1$ et n est quelconque (ou $n = 1$ et m quelconque)

soit $m = 2$ et $n = 2$.

Ce qui fait que les plans symétriques constituent en quelque sorte une famille maximale d'objets combinatoires.