3. Questions d'« unicité »

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1971)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

2.6. Signalons aussi le résultat suivant (le cas $k = 2$ étant trivial):

Si $k = 3$ *ou* 4 *les conditions nécessaires* (1.3) *sont aussi suffisantes pour l'existence d'un* $[v, b, r, k, \lambda]$.

Mais cela n'est plus vrai à partir de $k = 5$: ainsi $[15, 21, 7, 5, 2]$ et $[36, 42, 7, 6, 1]$ n'existent pas.

2.7. La classification des solutions entières des équations (1.3) peut être faite soit par b croissants (car $b \geqq v > k$ et $b > r > \lambda$) soit — c'est la tradition — par r croissants (il n'existe en effet qu'un nombre fini de solutions aux équations (1.3) quand r est fixé). On trouvera dans [2] une telle classification pour $r \leqq 15$. On y a toujours $v \geqq 2k$ (compte tenu de (2.1)) et les $[v, tb, tr, k, t\lambda]$ sont omis quand il existe un $[v, b, r, k, \lambda]$. Le nombre de plans dont l'existence est encore inconnue est important ($[46, 69, 9, 6, 1]$ étant le plus «petit» de ceux-ci). Postérieurement à la parution de [2] certains de ces problèmes d'existence ont été résolus ([5], [7]) positivement: $[56, 11, 2]$, $[45, 12, 3]$, $[36, 15, 6]$. Signalons enfin une conjecture: v et k étant donnés (les équations (1.3) ont alors une infinité de solutions en b, r, λ) il existe toujours un $[v, b, r, k, \lambda]$ sauf peut-être dans un nombre fini de cas.

3. Questions d'« unicité »

3.1. Précisons d'abord ce qu'on entend par plans isomorphes.

Définition. — Deux $[v, b, r, k, \lambda]$ seront dits *isomorphes* si leurs matrices d'incidences A_1 et A_2 sont telles qu'il existe deux matrices de permutation P et Q, d'ordres v et b respectivement, vérifiant $A_1 = P A_2 Q$.

3.2. *Pour* $n = 2, 3, 4, 5, 7, 8$ *il existe un seul plan projectif* (resp. *affine*) *d'ordre* n.

Mais ce n'est plus vrai pour $n = 9$. On conjecture toutefois l'unicité d'un tel plan pour n premier. Mais pour certaines valeurs de n primaire il existe au moins quatre plans projectifs (ou affines) d'ordre n non isomorphes deux à deux [3].

3.3. *Les plans pour lesquels* $k = 3$ et $\lambda = 1$ (appelés triplets de Steiner) *sont uniques pour* $v = 3, 7, 9$. *Il y a deux solutions pour* $v = 13$ *et* 80 *solutions pour* $v = 15$. Le nombre de solutions est inconnu pour $v > 15$.

3.4. Signalons enfin des résultats isolés ([4], [6]):

[11, 5, 2] *et* [12, 22, 11, 6, 5] *sont uniques*;

il y a 5 [15, 7, 3], 25 [16, 30, 15, 8, 7], ...

4. Conclusion

Nous n'aborderons pas la question très complexe de la construction effective des plans équilibrés. Signalons toutefois que, mis à part des procédés artisanaux utilisés dans quelques cas, les méthodes consistent le plus souvent à travailler dans les groupes finis: après avoir utilisé au maximum les groupes cycliques, puis abéliens finis on commence à faire intervenir les groupes non abéliens.

Redisons enfin pour terminer, que la théorie que nous venons de présenter possède encore une foule de problèmes ouverts.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Dembowski, P., *Finite Geometries*, Springer (1968).

[2] Hall, M., *Combinatorial theory*, Blaisdell Publ. Company (1967).

[3] Ryser, H. J., *Combinatorial mathematics*, Wiley (1963) (traduit en français et édité par Dunod (1969)).

[4] Bhat, V. N. et S. S. Shrikhande, « Non-isomorphic solutions of some balanced incomplete block designs », *J. of Combinatorial theory* (1970), pp. 174-191.

[5] Hall, M., R. Lane et D. Wales, « Designs derived from permutation groups », *J. of Combinatorial theory* (1970), pp. 12-22.

[6] Stanton, R. G. et R. C. Mullin, « Uniqueness theorems in balanced incomplete block designs », *J. of Combinatorial theory* (1969), pp. 37-48.

[7] Wallis, J., « Two new block designs », *J. of Combinatorial theory* (1969), pp. 369-370.

(Reçu le 6 juillet 1971)

G. Heuzé

Département de Mathématiques

Université de Toulouse — Le Mirail

F-31 Toulouse