Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 17 (1971)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUITES ÉQUIRÉPARTIES DANS UN ESPACE LOCALEMENT COMPACT
Autor: Lesca, Jacques
Kapitel: §2. Première connexion de Galois
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-44585

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 17.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Théorème F. — Soient (X, μ) un espace-mesure, (x_n) une suite *μ-équirépartie dans X* et α un nombre réel $(0 \leq \alpha \leq 1)$.

Alors *$\mu_\alpha^{\mathbf{N}}$-presque toutes les sous-suites* de la suite x_n sont *μ-équiréparties dans X.*

1.5. *Généralisation*

Soit (X, μ) un espace-mesure. $A = (a_n^k)_{n \in \mathbf{N}^*, k \in \mathbf{N}^*}$ désigne une matrice infinie de nombres réels non négatifs. On dit qu'une suite $x = (x_n)$ de points de X est *A-μ-équirépartie* si, pour toute fonction $f \in \mathscr{C}_c(X, \mathbf{C})$ la suite $n \to \sum_{k=1}^{\infty} a_n^k f(u_k)$ qui existe, converge vers $\mu(f)$.

Supposons que pour tout n *la série* $\sum_{k=1}^{\infty} a_n^k$ *converge* et en outre que $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_n^k = 1$, alors les théorèmes A, B *se généralisent* sans difficultés pour la *A-μ-équirépartition.*

Si en outre il existe α positif tel que $\sup_{k=1}^{\infty} a_n^k = 0(n^{-\alpha})$, alors les théorèmes C, D et E et F *se généralisent pour la A-μ-équirépartition.*

§ 2. Première connexion de Galois

2.1. *Définitions*

Soit X un espace topologique localement compact dénombrable à l'infini et $\mathscr{T}$ l'ensemble des topologies sur $M_1^+(X)$. Considérons la relation suivante entre une topologie τ de $\mathscr{T}$ et une application f de $\mathscr{B} = \mathscr{B}(X, \mathbf{C})$: « *L'application $\mu \to \mu(f)$ est continue pour τ* ». Dans le cas où la relation est vraie nous écrivons $\tau \perp f$.

Si B est une partie de $\mathscr{B}$ posons

$$B^* = \{\tau \in \mathscr{T} : \forall f \in B, \tau \perp f\}.$$

Si T est une partie de $\mathscr{T}$ posons

$$T^* = \{f \in B : \forall \tau \in T, T \perp f\}.$$

(Les deux applications $B \to B^*$ et $T \to T^*$ sont abusivement notés de la même façon). Les images par ces applications sont dites *saturées* (de $\mathscr{B}(X, \mathbf{C})$ ou de $\mathscr{T}$).

Si on restreint ces applications aux saturés on a deux isomorphismes inverses de treillis, inverses l'un de l'autre.

Si B est une partie de $\mathscr{B}$, alors B^* est un *intervalle initial fermé*, par exemple si $B = \mathscr{C}_c = \mathscr{C}_c(X, \mathbf{R})$ par définition $B^* = [v \to [$ est l'ensemble des topologies plus fines que la *topologie vague* v.

Si T est une partie de $\mathscr{T}$, T^* est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{B}$ fermé pour la topologie de la convergence uniforme.

Nous dirons qu'une partie B de $\mathscr{B}$ est *suffisante* si $B^* = \mathscr{C}_c^*$ ou si la topologie initiale dans M_1^+ correspondant à B est la topologie vague.

2.2. *Détermination de* $\mathscr{C}_c^{**}$

$\mathscr{C}_c^{**}$ est la plus grande partie de $\mathscr{B}$ telle que la topologie initiale correspondante est la topologie vague.

Proposition A. — Soit X un espace localement compact dénombrable à l'infini, alors:

$$\mathscr{C}_c^{**} = \mathscr{C}_b \,(= \mathscr{C}_b^{**})$$

Démonstration. Si $f \in \mathscr{C}_b$, d'après [Bourbaki [1], Proposition 9, p. 61] l'application $\mu \to \mu(f)$ est continue pour la topologie vague dans $M_1^+(X)$, et par conséquent $f \in \mathscr{C}_c^{**}$. Alors $\mathscr{C}_b \subset \mathscr{C}_c^{**}$ et

$$\mathscr{C}_b^{**} \subset \mathscr{C}_b^{**} . \tag{1}$$

Prouvons maintenant qu'une fonction de $\mathscr{C}_c^{**}$ est nécessairement continue. Soit f une fonction non continue au point $x_o \in X$. Alors il existe $c > 0$ tel que, dans tout voisinage de x_o il existe x tel que $\left| f(x) - f(x_o) \right| \geq c$.

A chaque voisinage V associons la famille $\varphi(V)$ des mesures de Dirac en chaque point x de V ou $\left| f(x) - f(x_o) \right| \geq c$. Alors $\varphi(V)$ est une base de filtre dans $\mathscr{T}$, filtre qui converge vers la mesure de Dirac au point x_o pour la topologie vague. L'image par l'application $\mu \to \mu(f)$ de cette base de filtre ne converge pas vers $\mu_o(f)$.

Il en résulte que f n'appartient pas à $\mathscr{C}_c^{**}$; on a donc

$$\mathscr{C}_c^{**} \subset \mathscr{C}_b . \tag{2}$$

Les inclusions (1) et (2) entraînent bien l'égalité des trois ensembles $\mathscr{C}_c^{**}$, $\mathscr{C}_b$, $\mathscr{C}_b^{**}$.

§ 3. Seconde connexion de Galois

3.1. *Définitions*

Fixons une mesure $\mu_o \in M_1^+(X)$ et introduisons la nouvelle relation entre une topologie $\tau \in \mathscr{T}$ et une application $f \in \mathscr{B}$: « l'application $\mu \to \mu(f)$