§3. Seconde connexion de Galois

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1971)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Si T est une partie de $\mathscr{T}$, T^* est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{B}$ fermé pour la topologie de la convergence uniforme.

Nous dirons qu'une partie B de $\mathscr{B}$ est *suffisante* si $B^* = \mathscr{C}_c^*$ ou si la topologie initiale dans M_1^+ correspondant à B est la topologie vague.

2.2. *Détermination de* $\mathscr{C}_c^{**}$

$\mathscr{C}_c^{**}$ est la plus grande partie de $\mathscr{B}$ telle que la topologie initiale correspondante est la topologie vague.

Proposition A. — Soit X un espace localement compact dénombrable à l'infini, alors:

$$\mathscr{C}_c^{**} = \mathscr{C}_b (= \mathscr{C}_b^{**})$$

D é m o n s t r a t i o n. Si $f \in \mathscr{C}_b$, d'après [Bourbaki [1], Proposition 9, p. 61] l'application $\mu \to \mu(f)$ est continue pour la topologie vague dans $M_1^+(X)$, et par conséquent $f \in \mathscr{C}_c^{**}$. Alors $\mathscr{C}_b \subset \mathscr{C}_c^{**}$ et

$$\mathscr{C}_b^{**} \subset \mathscr{C}_b^{**} . \tag{1}$$

Prouvons maintenant qu'une fonction de $\mathscr{C}_c^{**}$ est nécessairement continue. Soit f une fonction non continue au point $x_o \in X$. Alors il existe $c > 0$ tel que, dans tout voisinage de x_o il existe x tel que $|f(x) - f(x_o)| \geq c$.

A chaque voisinage V associons la famille $\varphi(V)$ des mesures de Dirac en chaque point x de V ou $|f(x) - f(x_o)| \geq c$. Alors $\varphi(V)$ est une base de filtre dans $\mathscr{T}$, filtre qui converge vers la mesure de Dirac au point x_o pour la topologie vague. L'image par l'application $\mu \to \mu(f)$ de cette base de filtre ne converge pas vers $\mu_o(f)$.

Il en résulte que f n'appartient pas à $\mathscr{C}_c^{**}$; on a donc

$$\mathscr{C}_c^{**} \subset \mathscr{C}_b . \tag{2}$$

Les inclusions (1) et (2) entraînent bien l'égalité des trois ensembles $\mathscr{C}_c^{**}$, $\mathscr{C}_b$, $\mathscr{C}_b^{**}$.

§ 3. Seconde connexion de Galois

3.1. *Définitions*

Fixons une mesure $\mu_o \in M_1^+(X)$ et introduisons la nouvelle relation entre une topologie $\tau \in \mathscr{T}$ et une application $f \in \mathscr{B}$: « l'application $\mu \to \mu(f)$

est continue au point μ_o pour la topologie τ »; relation qu'on écrit $\tau \perp f$. Pour une partie $B \subset \mathscr{B}$ posons

$$B^o = \{\tau \in \mathscr{T} : \forall f \in B, \tau \perp f\}.$$

Pour une partie T de $\mathscr{T}$ posons

$$T^o = \{f \in B : \forall \tau \in T, \tau \perp f\}.$$

Les remarques écrites dans le paragraphe 2, à propos de l'application *, peuvent être reprises sans grand changement pour l'application o. Nous nous intéressons aux parties B de $\mathscr{B}$, telles que $B^o = \mathscr{C}_c^{oo}$ (les voisinages de μ_o pour la topologie initiale correspondante à B sont les mêmes que les voisinages de μ_o pour la topologie vague).

3.2. *Etude de $\mathscr{C}_c^{oo}$. Démonstration de la première partie du Théorème A*

Proposition B. — $\mathscr{C}_c^{oo} = \mathscr{R}^{oo}$.

Démonstration. D'après Bourbaki [[1] §5.3, proposition 7], si $f \in \mathscr{R} = \mathscr{R}(X, \mathbf{C})$, l'application $\mu \to \mu(f)$ est continue au point μ_o, si les applications $\mu \to \mu(g)$ sont continues au point μ_o pour tout $g \in \mathscr{C}_b$; où ce qui est équivalent d'après la proposition A, si les applications $\mu \to \mu(g)$ sont continues au point μ_o pour tout $g \in \mathscr{C}_c$. On a donc:

$$\mathscr{R} \subset \mathscr{C}_c^{oo}.$$

On en déduit: $\mathscr{R}^{oo} \subset \mathscr{C}^{oooo} = \mathscr{C}^{oo}$. D'autre part, de $\mathscr{R} \supset \mathscr{C}_c$ on déduit $\mathscr{R}^{oo} \supset \mathscr{C}^{oo}$, ce qui achève la démonstration.

Proposition C. — $\mathscr{C}^{oo} = \mathscr{R}' = \mathscr{R}'(X)$.

Démonstration. Puisque $\mathscr{R}'$ est inclus dans $\mathscr{R}$, $\mathscr{R}'^{oo} \subset \mathscr{R}^{oo} = \mathscr{C}_c^{oo}$. Montrons que $\mathscr{R}'^{oo} \supset \mathscr{C}_c^{oo}$.

1) Soit h une fonction borélienne bornée, nulle en dehors d'un compact et qui vaut o, μ_o-presque partout, vérifions que h appartient à $\mathscr{R}'^{oo}$. Supposons $|h|$ bornée par $c \neq 0$, et majorons $\frac{1}{c} h$ par une fonction h' de $\mathscr{R}'$ qui est nulle μ_o-presque partout.

Pour toute mesure μ de M_1^+ on a $|\mu(h)| \leq \mu(h')$. Par hypothèse si τ est une topologie de $\mathscr{R}'^{oo}$, la fonction $\mu \to \mu(h')$ tend vers 0 quand μ tend vers μ_o pour la topologie τ.

Il en est de même des fonctions $\mu \to \mu\left(\frac{1}{c}h\right)$ et $\mu \to \mu(h)$.

2) Montrons que si $f \in \mathscr{C}_c$, alors $f \in \mathscr{R}'^{oo}$. Si $f \in \mathscr{C}^c$, l'ensemble des α tels que $\mu_o(f^{-1}(\{\alpha\}))$ n'est pas nul et est au plus dénombrable, son complémentaire est dense dans **R**. On en déduit que pour tout ε positif on peut trouver g, une combinaison linéaire finie, de fonctions de $\mathscr{R}$ et une fonction h, nulle en dehors d'un compact et qui vaut o μ_o-presque partout, telles que:

$$|f-(g+h)| \leq \varepsilon .$$

Puisque $\mathscr{R}'^{oo}$ est fermée pour la topologie de la convergence uniforme on en déduit que

$$f \in \mathscr{R}'^{oo} .$$

3) Puisque d'après 2), $\mathscr{C}_c \subset \mathscr{R}'^{oo}$ on a bien

$$\mathscr{C}_c'^{oo} \subset \mathscr{R}'^{oooo} = \mathscr{R}'^{oo} . \tag{0}$$

La première partie du théorème A est la conséquence du théorème C. La démonstration de la deuxième partie du théorème A est repoussée au §5.3.

3.3. *Cas des groupes abéliens. Démonstration du Théorème B*

Le théorème B est la conséquence de la proposition suivante (bien connu en théorie des probabilités quand le groupe X est le groupe additif des réels).

Proposition D. — Soient X un groupe *abélien localement compact*, Γ le groupe topologique de ses caractères continus et (μ_n) une suite de mesures de $M_1^+(X)$.

Si la suite $(\hat{\mu}_n)$ des transformées de Fourier-Sieltjès *converge ponctuellement* vers une fonction f et si f est *continue à l'origine*, alors la suite (μ_n) *converge* dans M_1^+, pour la *topologie vague*, vers une mesure dont la transformée de Fourier-Sieltjès est f.

D é m o n s t r a t i o n. 1) La sphère $\{\mu: \|\mu\| \leq 1\}$ est compacte pour la topologie vague v; de la suite μ_n on peut donc extraire une sous-suite $\mu_{\tau(n)}$ qui converge, pour v, vers une mesure μ qui est positive et de norme au plus égale à 1.

2) Démontrons que μ est de norme 1. Soit K un voisinage compact de 0 dans Γ et χ la fonction caractéristique de k. La fonction χ est intégrale

pour la mesure de Haar h dans Γ; définissons $\hat{\chi}: X \to \mathbf{C}$, par:

$$\hat{\chi}(x) = \int \gamma(x) \chi(\gamma) \, d\, h(\gamma)$$

$\hat{\chi}$ appartient à $C_o(X)$. Pour une mesure de Borel régulière v telle que $\| v \| < \infty$ on a

$$v(\hat{\chi}) = \int \hat{\chi}(x) \, dv(x) = \iint \gamma(x) \chi(\gamma) \, dh(\gamma) \, dv(x) = \int \chi(\gamma) \hat{v}(\gamma) \, dh(\gamma) \quad (1)$$

Puisque $\hat{\chi}$ appartient à $C_o(X)$,

$$\lim_{n \to \infty} \left(\mu_{\tau(n)}(\chi)\right) = \mu(\chi)$$

et en utilisant (1) on en déduit:

$$\lim_{n \to \infty} \int \chi(\gamma) \hat{\mu}_{\tau(n)}(\gamma) \, dh(\gamma) = \int \chi(\gamma) \hat{\mu}(\gamma) \, dh(\gamma) \, .$$

Grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient:

$$\int \chi(\gamma) f(\gamma) \, dh(\gamma) = \int_k \hat{\mu}(\gamma) \, d\gamma \, ,$$

et, par conséquent

$$\int_k f(\gamma) \, dh(\gamma) = \int_k \hat{\mu}(\gamma) \, dh(\gamma) \, . \quad (2)$$

Les fonctions f et μ sont continues au point 0, on déduit de (2):

$$\hat{\mu}(0) = f(0) = 1 \, .$$

La mesure μ, mesure positive, est de norme 1.

3) Démontrons que f est la transformée de Fourier-Stieltjès de μ et que la suite (μ_n) converge vaguement vers μ. Il résulte de la proposition A que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\hat{\mu}_{\tau(n)}(\gamma)$ converge vers $\mu(v)$, par conséquent, on a $f = \mu$. Comme l'application $\mu \to \hat{\mu}$ est injective on en déduit que la suite μ_n ne possède qu'un point d'accumulation μ; elle converge donc vers μ.

§ 4. Les espace-mesures

4.1. *Existence de familles suffisantes dénombrables*

Proposition D. — Si X est un *localement compact* et possède une *base* topologique dénombrable, alors il existe un sous-ensemble $\mathscr{F}$ de $\mathscr{C}_c = \mathscr{C}_c(X, \mathbf{R})$ qui est à la fois *dénombrable*, *partout dense* dans $\mathscr{C}_c$ et *suffisant*. ($\mathscr{C}_c$ muni de la topologie de la convergence uniforme.)