§6. Espaces produit

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1971)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

tandis que

$$\hat{\mu}(\gamma_o) = \hat{h}(\gamma_o) + \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}.$$

§ 6. Espaces produit

6.1. *Familles suffisantes dans un espace produit*

Proposition F. — Soient (X, μ), (Y, ν) deux espaces-mesures et $\mathcal{U}$ [resp. $\mathcal{V}$] une famille d'ouverts de X, *dénombrable* et *suffisante* pour la mesure μ [resp. ν], base topologique de X [resp. Y]. Alors $\mathfrak{M} = \{ U \times V : U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V} \}$ est une *base topologique dénombrable* de $X \times Y$, *suffisante pour la mesure* $\mu \times \nu$.

Démonstration. $\mathfrak{M}$ est une base dénombrable de $X \times Y$, montrons qu'elle est suffisante pour la mesure $\mu \times \nu$. Soit une suite $u = (u_n)$ de points de $X \times Y$ telle que pour tout $M = U \times V \in \mathfrak{M}$:

$$\lim_{n \to \infty} \{ \Pi(M, n)/n \} = \mu U \cdot \nu V = \mu \times \nu(M). \tag{1}$$

Il est clair que la relation (1) reste vraie pour l'algèbre de Boole engendrée par la famille $\mathfrak{M}$ et en particulier, qu'elle est vraie lorsqu'on remplace M par une union finie d'éléments de la famille $\mathfrak{M}$.

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $X \times Y$. $\mathcal{O}$ est couvert par les éléments de la famille $\mathfrak{M}$ qui sont inclus dans $\mathcal{O}$. Il s'en suit que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une union finie S d'éléments de $\mathfrak{M}$ tels que $S > 0$ et $\mu(\mathcal{O} - S) \leqq \varepsilon$. On en déduit que:

$$\liminf_{n \to \infty} \{ \Pi(\mathcal{O}; n)/n \} = \mu \times \nu(\mathcal{O}). \tag{2}$$

Si enfin A est une partie de $X \times Y$ dont la frontière est de mesure nulle, on déduit, de la propriété précédente appliquée d'une part à l'intérieur de A et d'autre part à l'intérieur de son complémentaire:

$$\lim_{n \to \infty} \big(\Pi(A; n)/n \big) = \mu \times \nu(A).$$

La famille $\mathfrak{M}$ est donc bien suffisante pour $\mu \times \nu$.

6.2. *Démonstration du Théorème E*

Utilisons $\mathcal{U}$ [resp. $\mathcal{V}$] une famille dénombrable *suffisante* pour la mesure μ [resp. ν]. Pour qu'une suite $u_n = (x_n, y_n)$ soit $\mu \times \nu$ équirépartie, il faut et il suffit que pour tout $V \in \mathscr{V}$ la suite des indices (n_i) tels que $y_n \in V$ ait la fréquence $\nu(V)$, et que, la sous suite $i \to x_{n_i}$ soit μ-équirépartie dans X.

Or par hypothèse, la première condition est remplie. ν fixé, la seconde condition l'est pour μ^{N}-presque tout $x = (x_n)$ de X^{N} d'après le théorème 3.A.

Puisque la famille $\mathscr{V}$ est dénombrable, la fin de la preuve est immédiate.

6.3. *Démonstration du Théorème F*

Soit a un point arbitraire de X. Définissons l'application continue f de $\{0, 1\} \times X$ dans X par

$$f(0, x) = a \qquad f(1, x) = x .$$

La fonction f est continue et l'image par f de la mesure $\nu = \mu_\alpha \times \mu$ est la mesure $f(\nu) = (1-\alpha)\,\delta_a + \alpha\mu$, où δ_a désigne la mesure de Dirac au point a.

Alors d'après le théorème E, $(\mu_\alpha)^{\mathrm{N}}$-presque toutes les suites (y_n) de $(0, 1)^{\mathrm{N}}$ sont telles que (y_n, x_n) est ν-équirépartie, et par conséquent la suite $n \to f(y_n, x_n)$ est $f(\nu)$-équirépartie.

D'autre part, pour μ_α^{N}-presque toute suite (y_n), o a la « fréquence » $1 - \alpha$. On déduit des deux derniers résultats, que pour μ_α^{N}-presque sous-suite de x_n est μ-équirépartie dans X; on vérifie, facilement, en effet, que si une suite est ν-équirépartie et qu'elle contient une sous-suite de densité $1 - \alpha$, δ_a équirépartie, la sous-suite constituée par les « termes restants » est μ-équirépartie.

RÉFÉRENCES

[1] BOURBAKI, N., *Intégration*, chap. IX.
[2] —— *Topologie générale*, chap. X.
[3] HELMBERG, H., *Math. Zeitschr. 86*, pp. 157-189 (1964).

(Reçu le 1er juin 1971)

J. Lesca
Faculté des Sciences de Bordeaux
351, cours de la Libération
F-33 — Talence