

§6. Espaces produit

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1971)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

tandis que

$$\hat{\mu}(\gamma_0) = \hat{h}(\gamma_0) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

§ 6. ESPACES PRODUIT

6.1. Familles suffisantes dans un espace produit

Proposition F. — Soient (X, μ) , (Y, ν) deux espaces-mesures et \mathcal{U} [resp. \mathcal{V}] une famille d'ouverts de X , dénombrable et suffisante pour la mesure μ [resp. ν], base topologique de X [resp. Y]. Alors $\mathfrak{M} = \{ U \times V : U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V} \}$ est une base topologique dénombrable de $X \times Y$, suffisante pour la mesure $\mu \times \nu$.

Démonstration. \mathfrak{M} est une base dénombrable de $X \times Y$, montrons qu'elle est suffisante pour la mesure $\mu \times \nu$. Soit une suite $u = (u_n)$ de points de $X \times Y$ telle que pour tout $M = U \times V \in \mathfrak{M}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{ \Pi(M, n)/n \} = \mu U \cdot \nu V = \mu \times \nu(M). \quad (1)$$

Il est clair que la relation (1) reste vraie pour l'algèbre de Boole engendrée par la famille \mathfrak{M} et en particulier, qu'elle est vraie lorsqu'on remplace M par une union finie d'éléments de la famille \mathfrak{M} .

Soit \mathcal{O} un ouvert de $X \times Y$. \mathcal{O} est couvert par les éléments de la famille \mathfrak{M} qui sont inclus dans \mathcal{O} . Il s'en suit que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une union finie S d'éléments de \mathfrak{M} tels que $S > 0$ et $\mu(\mathcal{O} - S) \leq \varepsilon$. On en déduit que :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \{ \Pi(\mathcal{O}; n)/n \} = \mu \times \nu(\mathcal{O}). \quad (2)$$

Si enfin A est une partie de $X \times Y$ dont la frontière est de mesure nulle, on déduit, de la propriété précédente appliquée d'une part à l'intérieur de A et d'autre part à l'intérieur de son complémentaire :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\Pi(A; n)/n) = \mu \times \nu(A).$$

La famille \mathfrak{M} est donc bien suffisante pour $\mu \times \nu$.

6.2. Démonstration du Théorème E

Utilisons \mathcal{U} [resp. \mathcal{V}] une famille dénombrable suffisante pour la mesure μ [resp. ν]. Pour qu'une suite $u_n = (x_n, y_n)$ soit $\mu \times \nu$ équirépartie, il faut et il

suffit que pour tout $V \in \mathcal{V}$ la suite des indices (n_i) tels que $y_n \in V$ ait la fréquence $\nu(V)$, et que, la sous suite $i \rightarrow x_{n_i}$ soit μ -équirépartie dans X .

Or par hypothèse, la première condition est remplie. ν fixé, la seconde condition l'est pour $\mu^{\mathbb{N}}$ -presque tout $x = (x_n)$ de $X^{\mathbb{N}}$ d'après le théorème 3.A.

Puisque la famille \mathcal{V} est dénombrable, la fin de la preuve est immédiate.

6.3. Démonstration du Théorème F

Soit a un point arbitraire de X . Définissons l'application continue f de $\{0, 1\} \times X$ dans X par

$$f(0, x) = a \quad f(1, x) = x.$$

La fonction f est continue et l'image par f de la mesure $\nu = \mu_\alpha \times \mu$ est la mesure $f(\nu) = (1 - \alpha) \delta_a + \alpha\mu$, où δ_a désigne la mesure de Dirac au point a .

Alors d'après le théorème E, $(\mu_\alpha)^{\mathbb{N}}$ -presque toutes les suites (y_n) de $(0, 1)^{\mathbb{N}}$ sont telles que (y_n, x_n) est ν -équirépartie, et par conséquent la suite $n \rightarrow f(y_n, x_n)$ est $f(\nu)$ -équirépartie.

D'autre part, pour $\mu_\alpha^{\mathbb{N}}$ -presque toute suite (y_n) , α a la « fréquence » $1 - \alpha$. On déduit des deux derniers résultats, que pour $\mu_\alpha^{\mathbb{N}}$ -presque sous-suite de x_n est μ -équirépartie dans X ; on vérifie, facilement, en effet, que si une suite est ν -équirépartie et qu'elle contient une sous-suite de densité $1 - \alpha$, δ_a équirépartie, la sous-suite constituée par les « termes restants » est μ -équirépartie.

RÉFÉRENCES

- [1] BOURBAKI, N., *Intégration*, chap. IX.
- [2] ——— *Topologie générale*, chap. X.
- [3] HELMBERG, H., *Math. Zeitschr.* 86, pp. 157-189 (1964).

(Reçu le 1^{er} juin 1971)

J. Lesca
 Faculté des Sciences de Bordeaux
 351, cours de la Libération
 F-33 — Talence