

# Notes sur le chapitre 9

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1973)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$$(5.3.5) \quad Z(V_6; t) = 1/(1-t)(1-qt)(1-q^2t)(1-\pi_2t)^3(1-\bar{\pi}_2t)^3,$$

$V_6$  désignant la surface cubique étudiée. Ce résultat est conforme aux conjectures de Weil: on a  $P_0(t) = 1-t$ ,  $P_1(t) = P_3(t) = 1$ ,  $P_4(t) = 1-q^2t$ , et  $P_2(t) = (1-qt)(1-\pi_2t)^3(1-\bar{\pi}_2t)^3$ ; l'hypothèse de Riemann se réduit à  $|\pi_2| = |\bar{\pi}_2| = |\pi(\chi, \chi, \bar{\chi})| = q$  (chap. 5, prop. 10, cor. 1, (ii)); la « caractéristique d'Euler-Poincaré » est égale à  $1 + 7 + 1 = 9$ , et l'équation fonctionnelle s'écrit  $Z(V_6; 1/q^2t) = -q^9t^9Z(V_6; t)$ .

### Notes sur le chapitre 9

§ 1-2-3-4: l'idée d'étudier arithmétiquement un corps de fonctions algébriques d'une variable sur un corps fini semble apparaître nettement pour la première fois chez Dedekind (1857). Mais c'est dans la thèse d'Artin (1924), puis dans les travaux de Schmidt (1931) et Hasse (1933, 1934, 1936), qu'est définie la notion de fonction zêta (« Kongruenzzetafunktion ») et formulée l'« hypothèse de Riemann » en caractéristique  $p$  (Artin, Schmidt, Hasse utilisent le langage des corps de fonctions algébriques d'une variable, et non celui des courbes: mais ces deux langages sont équivalents, ou plutôt, le sont devenus depuis les « Foundations » de Weil; voir d'ailleurs Weil (1949), *Introduction*). L'équation fonctionnelle pour  $\zeta(V; s)$  (c'est-à-dire, aux notations près, la proposition 3) est due à Schmidt (1931); la démonstration de l'hypothèse de Riemann pour  $g = 1$  est due à Hasse (1933, 1934), et, pour  $g$  quelconque, à Weil (1940; 1948, a). Les diverses définitions de  $Z(V; t)$  données au paragraphe 1 figurent, pour une courbe, dans Weil (1948, a), et, pour une variété projective non singulière de dimension quelconque, dans Weil (1949); cet article contient également l'énoncé (et, pour des cas particuliers, la vérification) des « conjectures de Weil ». L'existence d'une « formule de Lefschetz » en géométrie algébrique est conjecturée dans Weil (1954) (p. 556): d'où la notion de « cohomologie de Weil » — cette terminologie étant d'ailleurs considérée par Weil lui-même comme « tout à fait inadéquate » (*wholly unsuitable*). Au sujet du lien formel entre théories cohomologiques des variétés algébriques et propriétés des fonctions zêta, voir Demazure (1969), notamment §§ 7 et 9. Au sujet du lien entre méthodes  $p$ -adiques et méthodes cohomologiques, voir Katz (1972) (cet exposé contient une abondante bibliographie).

Signalons qu'à côté des fonctions zêta, on peut (comme en arithmétique) construire, pour les variétés algébriques, des « séries L »; pour une définition générale (en langage des schémas, et englobant d'ailleurs les séries L de la théorie des nombres), voir [16], pp. 86-91. La rationalité des séries L des

variétés algébriques a été établie par Grothendieck (1964, b); voir également Dwork (1966, b). Pour l'application de ce résultat à l'étude des sommes exponentielles, voir notamment Bombieri (1966).

§ 5: les exemples de ce paragraphe sont empruntés essentiellement à Davenport-Hasse (1934) et à Weil (1949). Signalons que le lemme 1 (sect. 5.2) peut aussi se démontrer à l'aide de la proposition 9, (ii) (chap. 5), et du résultat suivant, dû à Stickelberger (1890): si  $\chi$  est un caractère multiplicatif de  $\mathbf{F}_{p^2}$ , et si  $\theta$  est un élément primitif de  $\mathbf{F}_{p^2}/\mathbf{F}_p$ , on a  $\tau(\chi | \beta) = \chi(\theta) p$ , si  $p \neq 2$ , et  $\tau(\chi | \beta) = p$  si  $p = 2$ ; pour une démonstration de ce dernier énoncé, voir aussi Carlitz (1956, a).

Pour  $V = V_1$  et  $q \equiv -1 \pmod{6}$ , ou  $V = V_2^*$  et  $q \equiv -1 \pmod{4}$ , ou  $V = V_3^*$  et  $q \equiv -1 \pmod{3}$ , on a trouvé la même expression

$$Z(V; t) = (1 + qt^2)/(1 - t)(1 - qt);$$

ceci résulte (1) du fait que, dans les trois cas, on a  $N_1 = q + 1$ , et (2) de la relation  $Z(V; t) = (1 + (N_1 - q - 1)t + qt^2)/(1 - t)(1 - qt)$ , valable pour toute courbe  $V$  (projective, non singulière) de genre 1, définie sur  $k$  et ayant  $N_1$  points rationnels sur  $k$  (cette relation se déduit facilement du théorème 3 et du théorème 2, corollaire 1 et remarque). En fait, si deux courbes de genre 1, définies sur  $k$ , ont même nombre  $N_1$  de points rationnels sur  $k$ , alors, elles ont le même nombre  $N_m$  de points rationnels sur  $k_m$  pour tout  $m$ , puisqu'elles ont même fonction zêta (appliquer la formule ci-dessus !): on peut prouver que ceci se produit si et seulement si les deux courbes sont isogènes sur  $k$  (voir [4], p. 242, pour la partie « si », et Tate (1966), pour la partie « seulement si ».)

## BIBLIOGRAPHIE

### 1. *Ouvrages généraux, monographies.*

- [1] ARTIN, E. *Geometric Algebra*, Interscience Publishers (1957).
- [2] ——— *Algebraic Numbers and Algebraic Functions*, Gordon and Breach (1967).
- [3] BOREVICH, Z. I. and I. R. SHAFAREVICH. *Number Theory*, Academic Press (1966).
- [4] CASSELS, J. W. S. *Diophantine equations with special reference to elliptic curves* (survey article), J. London Math. Soc., 41 (1966), pp. 193-291.
- [5] EICHLER, M. *Introduction to the theory of algebraic numbers and functions*, Academic Press (1966).
- [6] GEL'FAND, A. et I. LINNIK. *Méthodes élémentaires dans la théorie analytique des nombres*, Gauthier-Villars (1965).
- [7] GREENBERG, M. J. *Lectures on forms in many variables*, Benjamin (1969).