

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 19 (1973)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LE CONTRÔLE OPTIMAL DE SYSTÈMES DISTRIBUÉS  
**Autor:** Lions, J. L.  
**Kapitel:** 3.1. Un système hyperbolique  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-46289>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 18.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

### 3. CAS LINÉAIRE QUADRATIQUE — REMARQUES SUR LE SYSTÈME D'OPTIMALITÉ

#### 3.1. Un système hyperbolique

On reprend ici certains points de Lions [3]: dans un ouvert borné  $\Omega$  de  $\mathbf{R}^n$  de frontière  $\Gamma$  régulière, on considère l'opérateur  $A$  défini par:

$$(3.1) \quad A\varphi = \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

où les fonctions  $a_i \in C^1(\bar{\Omega})$ ; [on pourrait aussi bien considérer des fonctions dépendant de  $x$  et  $t$ ; nous nous bornons au cas où les  $a_i$  ne dépendent pas de  $t$  uniquement pour un peu simplifier l'exposé]. On introduit:

$$\Gamma_- = \{x \mid x \in \Gamma, \sum_{i=1}^n a_i(x) \nu_i \leq 0\}$$

$$\Gamma_+ = \{x \mid x \in \Gamma, \sum_{i=1}^n a_i(x) \nu_i \geq 0\}$$

où  $\nu = \{\nu_i\}$  désigne la normale à  $\Gamma$  dirigée vers l'extérieur de  $\Omega$ .

On suppose que l'état  $y = y(v) = y(x, t; v)$  du système est défini par la solution du *problème mixte hyperbolique*:

$$(3.2) \quad \frac{\partial y}{\partial t} + Ay = f + v \text{ dans } Q = \Omega \times ]0, T[$$

$$(3.3) \quad y = 0 \text{ sur } \Sigma_- = \Gamma_- \times ]0, T[$$

$$(3.4) \quad y(x, 0) = y_0(x), \quad x \in \Omega$$

où  $f$  et  $y_0$  sont donnés avec:

$$(3.5) \quad f \in L^2(Q), \quad y_0 \in L^2(\Omega)$$

et où  $v \in \mathcal{U}_{ad}$  avec:

$$(3.6) \quad \mathcal{U}_{ad} = \text{ensemble convexe fermé non vide de } L^2(Q).$$

*Remarque 3.1.*

Il s'agit donc dans le problème précédent d'un *contrôle distribué*. (Cf. à ce sujet la Remarque 3.3. ci-après).

La *fonction coût* est donnée par:

$$(3.7) \quad J(v) = \int_Q |y(v) - z_d|^2 dx dt + N \int_Q v^2 dx dt,$$

où  $z_d$  est donnée dans  $L^2(Q)$  et où  $N$  est donné  $> 0$ .

Le problème

$$(3.8) \quad \begin{aligned} & \inf J(v) \\ & v \in \mathcal{U}_{ad} \end{aligned}$$

admet une *solution unique* (vérification immédiate) pour laquelle nous allons écrire le « *système d'optimalité* ».

3.2. *Système d'optimalité*

Soit  $u$  la solution de (3.8). On pose  $y(u) = y$  et l'on définit l'*état adjoint*  $p$  par <sup>1)</sup>:

$$(3.9) \quad -\frac{\partial p}{\partial t} + A^*p = y - z_d,$$

$$(3.10) \quad p = 0 \text{ sur } \Sigma_+ = \Gamma_+ \times ]0, T[,$$

$$(3.11) \quad p(x, T) = 0 \text{ sur } \Omega.$$

Le *contrôle*  $u$  est *caractérisé* par:

$$(3.12) \quad \int_Q (y - z_d)(y(v) - y) dx dt + N \int_Q u(v - u) dx dt \geq 0, \forall v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Mais on déduit facilement de (3.9), (3.10), (3.11) que:

$$\int_Q (y - z_d)(y(v) - y) dx dt = \int_Q p(v - u) dx dt$$

---

<sup>1)</sup>  $A^*$  est défini par  $A^* \varphi = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i \varphi)$ .