

4. COROLLARIES AND RELATED RESULTS

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1974)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Proof. One can write equation (2.2) as

$$(3.5) \quad (x + \sqrt{-D})(x - \sqrt{-D}) = [(1 + \sqrt{-D}) / 2]^k [(1 - \sqrt{-D}) / 2]^k.$$

By Lemma 3.7, equation (3.5) can be written as

$$[(1 + \sqrt{-D}) / 2]^k - [(1 - \sqrt{-D}) / 2]^k = \pm 2 \sqrt{-D},$$

i.e.,
$$a^k - b^k = \pm 2(a - b).$$

Therefore,

$$a^k - b^k = (a - b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \dots + ab^{k-2} + b^{k-1}) = \pm 2(a - b).$$

Hence, $a^{k-1} \equiv \pm 2 \pmod{b}$, or $(a^2)^{\frac{1}{2}(k-1)} \equiv \pm 2 \pmod{b}$. By Lemma 3.8, we have that $1 \equiv \pm 2 \pmod{b}$. As b cannot divide the units of $Q(\sqrt{-D})$, the only possibility is that $1 \equiv -2 \pmod{b}$, i.e. $3 \equiv 0 \pmod{b}$. This is impossible since $p \geq 5$. ∇

4. COROLLARIES AND RELATED RESULTS

The following results are similar to the ones already proved.

Corollary 4.1. If p is an odd prime equal to $(1 + n^2D)/4$, then the equation $x^2 + D = p^k$ has no solutions.

By proving a result analogous to Lemma 3.8, another result similar to Theorem 3.1 is obtained:

Theorem 4.2. Let $D \equiv 3 \pmod{4}$, $D > 3$. Let p be an odd prime such that $(-D/p) = +1$. If p does not divide $nm^{2z} \pm 2$ ($z = 0, 1, \dots, p-1$), then the equation $x^2 + D = p^k$ ($k \geq 1$) has no solutions. (See [4] for details.) ∇

Remark 4.3. By the preceding theorem, many equations can be shown to have no solutions; e.g., (1) $x^2 + 11 = 5^k$, (2) $x^2 + 43 = 13^k$, (3) $x^2 + 91 = 29^k$.

When $D = 3$, one obtains (by slight modifications of the arguments in §3):

Theorem 4.4. Let p be an odd prime such that $(-3/p) = +1$. A sufficient condition for the equation $x^2 + 3 = p^k$ to have no solutions is that p not divide $nm^z \pm 2$, $\left(\frac{m+n}{2}\right) \left(\frac{m-3n}{2}\right)^{2z} \pm 2$ and $\left(\frac{m-n}{2}\right) \left(\frac{m+3n}{2}\right)^{2z} \pm 2$ ($z = 0, 1, \dots, p-1$). ∇

Examples of equations with no solutions are (1) $x^2 + 3 = 13^k$,
(2) $x^2 + 3 = 109^k$.

The following remarks are similar to exercises in the book of Stark [15, pp. 309-316] and are related to results presented here. (p below is an odd prime.)

Remark 4.5. When $D > 3$, $n^2 + m^2D = 4p$ iff $(-D/p) = +1$. In this case there is exactly one solution in natural numbers m, n .

Remark 4.6. $n^2 + 3m^2 = 4p$ iff $(-3/p) = +1$. In this case there are exactly 3 solutions in natural numbers m, n .

REFERENCES

- [1] APÉRY, R. Sur une équation diophantienne. *C. R. Acad. Sc. Paris*, 251 (1960), pp. 1263-1264. MR 22 #10951.
- [2] ——— Sur une équation diophantienne. *C. R. Acad. Sc. Paris*, 251 (1960), pp. 1451-1452. MR 22 #10950.
- [3] COHEN, E. L. A note on perfect double error-correcting codes on q symbols. *Information and Control*, 7 (1964), pp. 381-384. MR 29 #5656.
- [4] ——— Sur certaines équations diophantiennes quadratiques. *C. R. Acad. Sc. Paris*, 274 (1972), pp. 139-140. MR 45 #169.
- [5] ——— Sur l'équation diophantienne $x^2 + 11 = 3^k$. *C. R. Acad. Sc. Paris*, 275 (1972), pp. 5-7. MR 46 #3445.
- [6] LANDAU, E. and A. OSTROWSKI. On the diophantine equation $ay^2 + by + c = dx^n$. *Proceedings of the London Mathematical Society*, (2), 19 (1921), pp. 276-280.
- [7] LJUNGGREN, W. *Norsk Matematisk Tidsskrift*, 25 (1943), p. 29.
- [8] MANN, H. B. *Introduction to Algebraic Number Theory*. Graduate School Studies, Mathematics Series No. 1, The Ohio State University Press, Columbus, Ohio, 1955. MR 17-240.
- [9] MORDELL, L. J. Indeterminate equations of the third and fourth degree. *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, 45 (1914), pp. 170-186.
- [10] NAGELL, T. Løsning til oppgave nr 2 (1943, s. 29), *Norsk Matematisk Tidsskrift*, 30 (1948), pp. 62-64.
- [11] ——— *Introduction to Number Theory*. John Wiley & Sons, New York, 1951. Problem 165, p. 272. MR 13-207.
- [12] RAMANUJAN, S. Question 464. *The Journal of the Indian Mathematical Society*, 5 (1913), p. 120.
- [13] ——— *Collected Papers*. Cambridge University Press, 1927. p. 327.
- [14] SHAPIRO, H. S. and D. L. SLOTNICK. On the mathematical theory of error-correcting codes. *IBM Journal of Research and Development*, 3 (1959), pp. 25-34. MR 20 #5092.
- [15] STARK, H. M. *An Introduction to Number Theory*. Markham Publishing Company, Chicago 1970. MR 40 #7186.