

### 3. Cyclotomy for $p = 1 + 4f$ .

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1974)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

#### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

### 3. CYCLOTOMY FOR $p = 1 + 4f$ .

Let  $g$  be a primitive root mod  $p$  which we have already fixed in § 2. Divide the non-zero residues mod  $p$  into four classes  $A_0, A_1, A_2, A_3$  by putting  $m \equiv g^v$  in  $A_i$  if  $v \equiv i \pmod{4}$ . The cyclotomic constants  $(h, k)$  ( $0 \leq h, k \leq 3$ ) are defined to be the number of values of  $y, 1 \leq y \leq p - 2$  for which

$$(3.1) \quad y \equiv g^{4t+h} \pmod{p}, \quad 1 + y \equiv g^{4s+k} \pmod{p}$$

[i.e. for which  $y \in A_h, 1 + y \in A_k$ ].

As results differ in the two cases  $p \equiv 1 \pmod{8}$  and  $p \equiv 5 \pmod{8}$  we look at these cases separately.

*Case 1:  $p \equiv 1 \pmod{8}$ .* In this case  $p = 1 + 4f$  where  $f$  is even. We know [3] that

$$(3.2) \quad \begin{cases} (h, k) = (k, h) \\ (h, k) = (-h, k-h) \end{cases}$$

Thus  $(1, 2) = (2, 3) = (1, 3); (1, 1) = (0, 3); (2, 2) = (0, 2); (3, 3) = (0, 1)$ . Therefore of the 16 cyclotomic constants which may be written as a  $(4 \times 4)$  matrix, only five are different and we have

$$(3.3) \quad \begin{bmatrix} (0, 0) & (1, 0) & (2, 0) & (3, 0) \\ (0, 1) & (1, 1) & (2, 1) & (3, 1) \\ (0, 2) & (1, 2) & (2, 2) & (3, 2) \\ (0, 3) & (1, 3) & (2, 3) & (3, 3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & D & C & B \\ D & B & E & E \\ C & E & C & E \\ B & E & E & D \end{bmatrix}$$

Consider the numbers  $1, 2, \dots, p - 1$ . Each  $y \in A_0$  (there are  $f$  such  $y$ 's) except the last (i.e.  $p - 1$  which is in  $A_0$  in this case) is followed by  $y + 1$  which may belong to  $A_0, A_1, A_2$  or  $A_3$ .

Similarly each  $y \in A_1$  without exception is followed by  $y + 1$  which may belong to  $A_0, A_1, A_2$  or  $A_3$  and so on. Hence we get

$$(3.4) \quad A + D + C + B = f - 1$$

$$(3.5) \quad D + B + 2E = f$$

$$(3.6) \quad 2C + 2E = f.$$

Case 2:  $p \equiv 5 \pmod{8}$ . In this case  $p = 4f + 1$  where  $f$  is odd. Now look at the congruence

$$(3.1)' \quad 1 + g^{4t+h} + g^{4s+k} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Denote the number of solutions of (3.1)' by  $\{h, k\}$ . Then clearly  $\{h, k\} = \{k, h\}$  and the following relations are known [3]

$$(3.2)' \quad \begin{cases} \{-h, k-h\} = \{h, k\} \text{ for any } f \text{ even or odd} \\ \{h, k\} = (h, k+2) \text{ for } f \text{ odd.} \end{cases}$$

Thus  $\{1, 0\} = \{3, 3\}$ ;  $\{3, 0\} = \{1, 1\}$ ;  $\{2, 0\} = \{2, 2\}$  and  $\{3, 1\} = \{1, 2\} = \{3, 2\}$ .

Therefore the matrix of the cyclotomic constants  $\{h, k\}$  can be written as

$$(3.3)' \quad \begin{bmatrix} \{0, 0\} & \{1, 0\} & \{2, 0\} & \{3, 0\} \\ \{0, 1\} & \{1, 1\} & \{2, 1\} & \{3, 1\} \\ \{0, 2\} & \{1, 2\} & \{2, 2\} & \{3, 2\} \\ \{0, 3\} & \{1, 3\} & \{2, 3\} & \{3, 3\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L & M & N & R \\ M & R & S & S \\ N & S & N & S \\ R & S & S & M \end{bmatrix}$$

Since  $f$  is odd,  $p - 1$  belongs to  $A_2$  hence in this case as before

$$\begin{aligned} (0, 1) + (0, 1) + (0, 2) + (0, 3) &= f \\ (1, 0) + (1, 1) + (1, 2) + (1, 3) &= f \\ (2, 0) + (2, 1) + (2, 2) + (2, 3) &= f - 1. \end{aligned}$$

Now using (3.2)' and (3.3)' we get

$$(3.4)' \quad L + M + N + R = f$$

$$(3.5)' \quad R + M + 2S = f$$

$$(3.6)' \quad 2N + 2S = f - 1.$$

#### 4. THE JACOBI FUNCTION

Let  $\alpha$  be any root ( $\neq 1$ ) of  $\alpha^{p-1} = 1$ . Write

$$(4.1) \quad F(\alpha) = \sum_{k=0}^{p-2} \alpha^k \zeta^{qk} \text{ where } \zeta^p = 1 \text{ and } \zeta \neq 1.$$