

## 4. The Jacobi function

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1974)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Case 2:  $p \equiv 5 \pmod{8}$ . In this case  $p = 4f + 1$  where  $f$  is odd. Now look at the congruence

$$(3.1)' \quad 1 + g^{4t+h} + g^{4s+k} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Denote the number of solutions of (3.1)' by  $\{h, k\}$ . Then clearly  $\{h, k\} = \{k, h\}$  and the following relations are known [3]

$$(3.2)' \quad \begin{cases} \{-h, k-h\} = \{h, k\} \text{ for any } f \text{ even or odd} \\ \{h, k\} = (h, k+2) \text{ for } f \text{ odd.} \end{cases}$$

Thus  $\{1, 0\} = \{3, 3\}$ ;  $\{3, 0\} = \{1, 1\}$ ;  $\{2, 0\} = \{2, 2\}$  and  $\{3, 1\} = \{1, 2\} = \{3, 2\}$ .

Therefore the matrix of the cyclotomic constants  $\{h, k\}$  can be written as

$$(3.3)' \quad \begin{bmatrix} \{0, 0\} & \{1, 0\} & \{2, 0\} & \{3, 0\} \\ \{0, 1\} & \{1, 1\} & \{2, 1\} & \{3, 1\} \\ \{0, 2\} & \{1, 2\} & \{2, 2\} & \{3, 2\} \\ \{0, 3\} & \{1, 3\} & \{2, 3\} & \{3, 3\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L & M & N & R \\ M & R & S & S \\ N & S & N & S \\ R & S & S & M \end{bmatrix}$$

Since  $f$  is odd,  $p - 1$  belongs to  $A_2$  hence in this case as before

$$\begin{aligned} (0, 1) + (0, 1) + (0, 2) + (0, 3) &= f \\ (1, 0) + (1, 1) + (1, 2) + (1, 3) &= f \\ (2, 0) + (2, 1) + (2, 2) + (2, 3) &= f - 1. \end{aligned}$$

Now using (3.2)' and (3.3)' we get

$$(3.4)' \quad L + M + N + R = f$$

$$(3.5)' \quad R + M + 2S = f$$

$$(3.6)' \quad 2N + 2S = f - 1.$$

#### 4. THE JACOBI FUNCTION

Let  $\alpha$  be any root ( $\neq 1$ ) of  $\alpha^{p-1} = 1$ . Write

$$(4.1) \quad F(\alpha) = \sum_{k=0}^{p-2} \alpha^k \zeta^{qk} \text{ where } \zeta^p = 1 \text{ and } \zeta \neq 1.$$

We shall employ a special case of the function (4.1) due to Jacobi. Let  $p = ef + 1$  and  $\beta$  be a primitive  $e$ -th root of unity. In (4.1) take  $\alpha = \beta^n$  ( $n$ -integer). We know ([3] page 395) that if  $e$  does not divide  $n$  then

$$(4.2) \quad F(\beta^n) F(\beta^{-n}) = (-1)^{nf} \cdot p$$

and if we put

$$(4.3) \quad R(n, m) = \frac{F(\beta^n) F(\beta^m)}{F(\beta^{m+n})},$$

then

$$(4.4) \quad R(n, m) = \sum_{h=0}^{e-1} \beta^{nh} \sum_{k=0}^{e-1} \beta^{-(m+n)k} (h, k).$$

From (4.2) and (4.3) it follows that if  $e$  does not divide  $m, n$  and  $m + n$  then

$$(4.5) \quad R(n, m) R(-n, -m) = p$$

and from (4.4) it follows that  $R(-n, -m)$  is got from  $R(n, m)$  by replacing  $\beta$  by  $\beta^{-1}$ . Let now  $e = 4$  and  $\beta = \sqrt{-1}$ ; using (4.4) we get

$$R(1, 1) = (A - B - C - D + 2E) + i(2D - 2B) \text{ in case } p \equiv 1 \pmod{8}$$

$$R(1, 1) = (L - M - R - N + 2S) + i(2M - 2R) \text{ in case } p \equiv 5 \pmod{8}.$$

### 5. PROOF COMPLETED

If  $p \equiv 1 \pmod{4}$  then  $p$  splits in  $Z[i]$  as  $p = \pi \bar{\pi}$  where  $\pi$  is prime in  $Z[i]$ .

*Case 1:  $p \equiv 1 \pmod{8}$ .*

$$\begin{aligned} \sum_{\text{all } v} \chi(v) \chi(v+1) &= \sum_{v \in A_0, A_1, A_2, A_3} \chi(v) \chi(v+1) = \sum_{A_0} + \sum_{A_1} + \sum_{A_2} + \sum_{A_3} \\ &= 1[A + Di - C - Bi] + i[D + Bi - E - Ei] \\ &\quad - 1[C + Ei - C - Ei] - i[B + Ei - E - Di] \\ &= [A - B - C - D + 2E] + i[2D - 2B] \\ (5.1) \quad &= R(1, 1) = (-2f + 8(1, 2) - 1) - 2i[D - B] \end{aligned}$$

where  $R(1, 1) \equiv -1 \pmod{2(1+i)}$  (as  $D - B = f - 2B - 2E$  by (3.5))

$$\begin{aligned} \text{and } \sum_{\text{all } v} \chi^2(v) \chi^2(v+1) &= (A - D + C - B) - (D - B + E - E) \\ &\quad + (C - E + C - E) - (B - E + E - D) \\ &= A + 3C - D - 2E - B = -1, \end{aligned}$$

by (3.4)