

# 4. Frobenius' theorem

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1974)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

number of conjugates of a subgroup is the index of its normalizer, so  $H$  has at most  $|G : H|$  conjugates in  $G$  and hence the union of the conjugates contains at most  $|G : H| (|H| - 1) + 1 = |G| - |G : H| + 1$  elements. This number is less than  $|G|$  except when  $G = H$ . Hence  $D = F$  is a field.

#### 4. FROBENIUS' THEOREM

Let  $\mathbf{R}$  denote the field of real numbers,  $\mathbf{C}$  the field of complex numbers and  $\mathbf{H}$  the division ring of quaternions. The following proof makes use of the fundamental theorem that every polynomial with coefficients in  $\mathbf{C}$  has a root in  $\mathbf{C}$ .

**THEOREM.** *Let  $D$  be a division ring which contains the real numbers  $\mathbf{R}$  in its centre and suppose that every element of  $D$  satisfies a polynomial with coefficients in  $\mathbf{R}$ . Then  $D$  is isomorphic to one of  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{C}$  or  $\mathbf{H}$ .*

*Proof.* Suppose that  $D$  is not isomorphic to  $\mathbf{R}$  or  $\mathbf{C}$ . It follows that the maximal subfield  $F$  of  $D$  is isomorphic to  $\mathbf{C}$ , the centre  $K$  of  $D$  is isomorphic to  $\mathbf{R}$  and  $F = K(i)$  where  $i^2 = -1$ . Let  $j$  be an eigenvector of  $T_i$  corresponding to the eigenvalue  $-i$ . Then  $ji = -ij$  and  $j^2$  commutes with  $j$  and  $F$ . From (2.2) and (2.3) the elements 1 and  $j$  form an  $F$ -basis for  $D$  and therefore  $j^2 = \alpha$  belongs to  $K$ . If  $\alpha = \beta^2$  for some  $\beta \in K$  then  $(j - \beta)(j + \beta) = 0$  and  $j$  belongs to  $K$ , which is not the case; hence  $\alpha = -\beta^2$  for some  $\beta \in K$ . Replacing  $j$  by  $j\beta^{-1}$  we obtain a  $K$ -basis 1,  $i$ ,  $j$ ,  $ij$  for  $D$  such that  $i^2 = j^2 = -1$  and  $ij = -ji$ . That is,  $D$  is isomorphic to  $\mathbf{H}$ .

An almost identical argument shows that if the dimension of  $D$  over its centre  $K$  is 4 and the characteristic is not 2, then  $D$  has a  $K$ -basis 1,  $i$ ,  $j$ ,  $ij$  where  $i^2 = \alpha$ ,  $j^2 = \beta$  and  $ij = -ji$  for some  $\alpha, \beta \in K$ .

#### 5. OTHER PROOFS OF WEDDERBURN'S THEOREM

The original proofs of the theorem of §3 were given first by Wedderburn [15] in 1905 and then by Dickson [5] in the same year; they depend on certain divisibility properties of the integers. The neatest proof along these lines is that of Witt [16]. Elementary proofs which avoid the use of such number theory have been given by Artin [1] and Herstein [7]. And