

# 4. Espaces vectoriels munis de sous-espaces. ([4], [6])

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1974)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

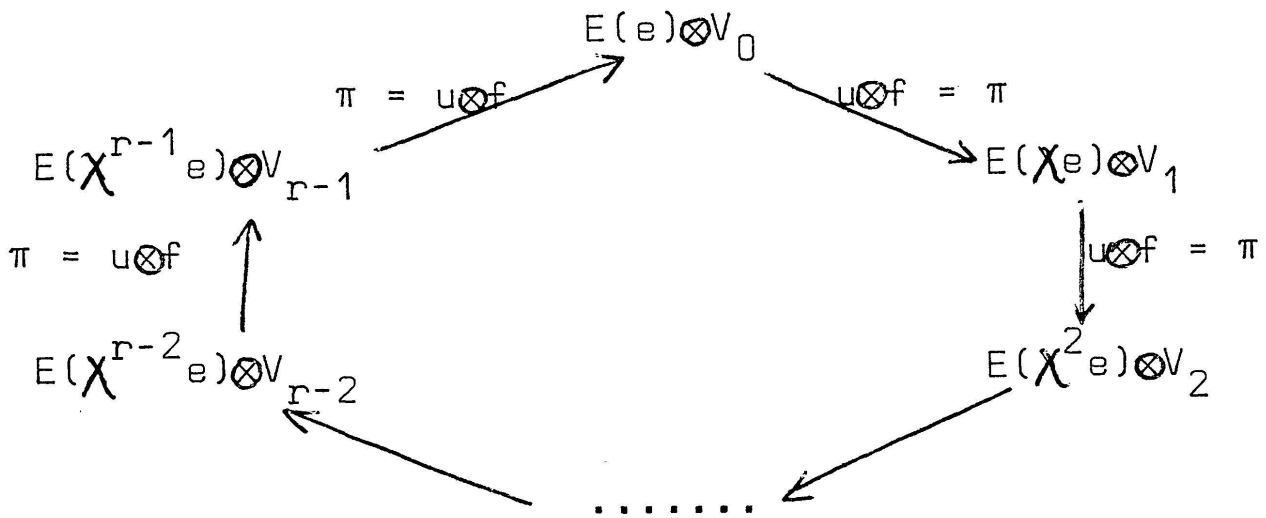
## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

avec  $f^{p^a} = f \circ f \circ \dots \circ f = 0$ . A ces données nous associons un  $G$ -module d'espace sous-jacent

$$\bigoplus_{i=0}^{i=r-1} E(\chi^i e) \otimes_k V_i.$$

L'opération de  $K$  est induite par celles de  $K$  sur les modules simples  $E(\chi^i e)$ . L'opération de  $\sigma \in S$  sur les différents facteurs  $E(\chi^i e) \otimes_k V_i$  est déterminée si l'on connaît celle de  $\pi$ , qui est elle-même décrite par la figure ci-dessous



où les  $u : {}_x E(\chi^i e) \simeq E(\chi^{i+1} e)$  sont des  $K$ -isomorphismes choisis une fois pour toutes.

Le  $G$ -module ainsi construit est indécomposable si et seulement si notre couronne d'espaces vectoriels est indécomposable. Ceci a lieu s'il existe un  $v \in V_i$  dont les itérés non nuls  $v, f(v), f^2(v), \dots$  forment une base de  $V_{r-1}$ .

$\bigoplus_{j=0}^{r-1} V_j$ . On peut montrer qu'on obtient ainsi tous les  $G$ -modules indécomposables.

#### 4. ESPACES VECTORIELS

MUNIS DE SOUS-ESPACES. ([4], [6])

Soit  $\mathbf{O}$  un ensemble ordonné, Une  $k$ -représentation linéaire de  $\mathbf{O}$  consiste en la donnée d'un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie  $V$  et d'une famille de sous-espaces  $(V(i))_{i \in \mathbf{O}}$  tels que  $V(i) \subset V(j)$  si  $i \leq j$ . La somme directe de deux représentations  $V'$  et  $V''$  a pour espace sous-jacent  $V' \oplus V''$  et est telle que

$$(V' \oplus V'')(i) = V'(i) \oplus V''(i)$$

pour tout  $i$ . Nous nous intéressons ici aux représentations indécomposables, c'est-à-dire aux représentations non nulles qui ne sont pas somme directe de 2 sous-représentations non nulles.

Kleiner, Nazarova et Roiter ont pu montrer que le nombre de classes d'isomorphisme de représentations indécomposables était infini si et seulement si  $\mathbf{O}$  contenait un sous-ensemble ordonné plein (c'est-à-dire muni de l'ordre induit) de l'un des types suivants:

- $\{1, 2, 3, 4\}$  (4 points incomparables deux à deux)
- $\{1 < 2, 3 < 4, 5 < 6\}$  (3 couples incomparables d'éléments comparables)
- $\{1 < 2 < 3, 4 < 5 < 6, 7\}$
- $\{1 < 2 < 3 < 4 < 5, 6 < 7, 8\}$
- $\{1 < 2 < 3 < 4, 5 < 6 > 7 < 8\}$ .

Cet énoncé joue un rôle essentiel dans leur démonstration des conjectures de Brauer-Thrall, dont nous allons donner le principe.

### 5. LE CONJECTURE-THÉORÈME DE BRAUER/THRALL-NAZAROVA/ROITER ([7]).

Soit  $A$  une algèbre de dimension finie sur un corps algébriquement clos  $k$ . Pour tout entier naturel  $n$ , nous posons  $v_A(n)$  = nombre de classes d'isomorphisme de  $A$ -modules indécomposables de  $k$ -dimension  $n$ . La conjecture de Brauer-Thrall dit que, si  $\sum_{n \in \mathbf{N}} v_A(n)$  est infini, il y a une infinité de  $n$  tels que  $v_A(n) = \infty$ . En 1968 Roiter a pu fournir un premier élément de réponse à cette conjecture en montrant de manière simple et élégante que si  $\sum_{n \in \mathbf{N}} v_A(n)$  est infini, il y a une infinité de  $n$  tels que  $v_A(n) \neq 0$ . Une démonstration complète de la conjecture de Brauer-Thrall n'a été publiée qu'en 1974 par Nazarova et Roiter. La démonstration reste technique et épineuse. Nous en développons seulement le principe:

Raisonnant par récurrence sur la dimension de  $A$ , nous pouvons supposer que  $\sum_n v_B(n) < \infty$  pour tout vrai quotient  $B$  de  $A$ , et que  $v_A(n) < \infty$  pour presque tout  $n$ . Il s'agit alors de montrer que  $\sum_n v_A(n) < \infty$ .