

## 4. Fixed Subsets

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1974)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$<^*, f^*$  and the variables are to range over  $R^*$ . Sometimes we shall put on some of the stars for emphasis.

#### 4. FIXED SUBSETS

Let  $S$  be a particular (fixed) subset of  $R$ . We can identify  $S$  with the one-place relation  $S(x)$  which holds for a given  $x$  if and only if  $x \in S$ ; that is,

$$S = \{ x \in R \mid S(x) \}.$$

We can now define a set  $S^* \subseteq R^*$  by

$$S^* = \{ x \in R^* \mid S^*(x) \}.$$

Clearly  $S \subseteq S^*$  because  $S^*(x)$  agrees with  $S(x)$  on  $R$ . We shall often write

$$x \in S \text{ instead of } S(x)$$

and

$$x \in S^* \text{ instead of } S^*(x).$$

The upshot of the above is that the Main Theorem also provides for an extension  $S^*$  for each  $S \subseteq R$  and that we can allow as admissible statements those which involve the sentence fragment  $x \in S$ ; in “lifting” statements from  $R$  to  $R^*$  we replace the fragment  $x \in S$  by  $x \in S^*$ . Warning! The requirement that admissible statements be permitted only variables ranging over  $R$  hasn’t been altered. In a given statement the functions, relations, and subsets must remain fixed!

Example 4.1. Let  $S = \{ x \in R \mid x < 6 \}$ . Now

$$(\forall x) (x \in S \leftrightarrow x < 6) \text{ is true in } R$$

so

$$(\forall x) (x \in S^* \leftrightarrow x <^* 6) \text{ is true in } R^*.$$

Thus

$$S^* = \{ x \in R^* \mid x <^* 6 \}.$$

Furthermore  $S^*$  is a proper extension of  $S$ , because for any infinitesimal  $\varepsilon$ , the number  $5 + \varepsilon$  is a member of  $S^*$ , but not being a standard number, it can’t be a member of  $S$ .

For any finite set  $T \subseteq R$  we can show  $T = T^*$ . Suppose  $T = \{a_1, \dots, a_n\}$  then

$$(\forall x) (x \in T \leftrightarrow [x = a_1 \vee x = a_2 \vee \dots \vee x = a_n])$$

is true in  $R$ , thus

$$(\forall x) (x \in T^* \leftrightarrow [x = a_1 \vee x = a_2 \vee \dots \vee x = a_n])$$

is true in  $R^*$ ; that is,  $T^* = \{a_1, \dots, a_n\}$ .

Although the Main Theorem makes no mention of functions  $f$  whose domain is a proper subset  $D \subset R$ . We can define a function  $f^* : D^* \rightarrow R^*$  in a natural way. Arbitrarily extend  $f$  to a function  $g$  which is defined on all of  $R$ ; then let  $f^*$  be the restriction of  $g^*$  to  $D^*$ . This definition is easily seen to be independent of the way  $f$  is extended.

## 5. INFINITE NATURAL NUMBERS

We have seen in the last section that each particular  $S \subseteq R$  has associated with it a certain extension  $S^* \subseteq R^*$ . We now consider the case when we take  $S$  to be  $N$ , the set of natural numbers. One can see that  $N^*$  actually has some non-standard members as follows. The statement “ $N$  is unbounded” is true in  $R$  and can be formulated as the admissible statement

$$(\forall x) (\exists y) (y \in N \wedge y > x);$$

therefore

$$(\forall x) (\exists y) (y \in N^* \wedge y > x)$$

is true in  $R^*$ . It asserts that  $N^*$  is an unbounded subset of  $R^*$ . If we let  $\alpha$  be an infinite member of  $R^*$ , then  $N^*$  must have an even larger member which, of course, is also infinite and non-standard.

We can show that all the non-standard members of  $N^*$  are infinite in the following way. Formulate as admissible statements each of the infinitely many assertions:

“All natural numbers are greater than 0.”

“No natural numbers lie between 0 and 1.”

“No natural numbers lie between 1 and 2.”

etc.