Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 20 (1974)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: BEGRÜNDUNG DER EULERSCHEN CHARAKTERISTIK INNERHALB DER EBENEN ELEMENTARGEOMETRIE

Autor: Hadwiger, H.

Kapitel: 2. Spezieller Teil

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-46893

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

1.4 Hauptsatz

Die Hauptklasse $\mathfrak{H}$ verdient im Zusammenhang mit den drei fundamentalen Masszahlen χ ,L, F ganz besonderes Interesse dadurch, dass der folgende *Hauptsatz* gilt:

Ist $\varphi \in \mathfrak{H}$ ein additives, bewegungsinvariantes und bedingt beschränktes Polygonfunktional, so lassen sich drei reelle Konstanten α, β, γ so angeben, dass über dem Polygonverband $\mathfrak{P}$ die Identität

$$\varphi(A) = \alpha\chi(A) + \beta L(A) + \gamma F(A) \tag{1.5}$$

besteht.

Die drei Funktionen χ ,L, F bilden also eine Basis des Vektorraumes $\mathfrak{H}$ und es gilt $\dim \mathfrak{H} = 3$.

Es genügen die drei Eigenschaften (1.2), (1.3), (1.4) eines Funktionals φ, um den Schluss ziehen zu können, dass eine Darstellung (1, 5) gültig ist, wonach φ durch die drei fundamentalen Masszahlen ausdrückbar wird.

2. Spezieller Teil

2.1 Kennzeichnung einer Charakteristik

Unter einer *Charakteristik* für Polygone verstehen wir eine Funktion $\chi\colon \mathfrak{P} \to \mathbf{R}$, welche die nachfolgenden drei Forderungen erfüllt:

$$\chi(\phi) = 0\,; \tag{2.1}$$

$$A \in \mathfrak{K},\ A \neq \phi \Rightarrow \chi(A) = 1\,; \tag{2.2}$$

$$A, B \in \mathfrak{P} \Rightarrow \chi(A) + \chi(B) = \chi(A \cup B) + \chi(A \cap B)\,. \tag{2.3}$$

Eine Charakteristik ist demnach ein über dem Polygonverband definiertes additives Funktional, das der Nullkonvention entspricht und so normiert ist, dass jedem nichtleeren Eipolygon der Wert 1 zugeordnet wird.

Mit der Additivität und Berücksichtigung der Sachlage, wonach jedes Polygon als Vereinigung endlich vieler Eipolygone dargestellt werden kann, folgt unmittelbar, dass χ ganzwertig ist, so dass also χ eine Funktion $\chi\colon \mathfrak{P} \to \mathbf{Z}$ darstellt. Es ist keineswegs selbstverständlich, dass eine derartige Charakteristik, welche die drei aufgestellten Axiome (2.1), (2.2), (2.3) befriedigt, existiert. Nachfolgend zeigen wir, dass dies in der Tat der Fall ist.

2.2 Existenzbeweis

Wir weisen nach, dass wenigstens eine Charakteristik existiert. Vorbereitend werden zunächst Hilfsfunktionen $\Phi: E \times \mathfrak{P} \to \mathbf{R}$ konstruiert, die einem Punkt $p \in E$ und einem Polygon $A \in \mathfrak{P}$ den reellen Wert $\Phi(p, A)$ so zuordnen, dass das Additionstheorem

$$\Phi(p, A) + \Phi(p, B) = \Phi(P, A \cup B) + \Phi(p, A \cap B) \tag{2.4}$$

uneingeschränkt gilt. Diesem Zwecke dienend, stellen wir mit dem Begriff *Umgebungsbild* $U(p, A)$ eines Punktes $p \in E$ bezüglich eines Polygons $A \in \mathfrak{P}$ ein nützliches Hilfsmittel bereit.

Mit Inanspruchnahme der elementargeometrischen Stuktur der kompakten, polygonalen Punktmenge $A \in \mathfrak{P}$ lässt sich zu jedem beliebig gewählten Punkt $p \in E$ ein $\sigma = \sigma(p, A) > 0$ so festlegen, dass die Punktmenge $U(p, A) = (1/\rho)(K\rho(p) \cap A)$ für alle ρ, $0 < \rho < \sigma$, nicht von ρ abhängig ist, wenn $K\rho(p)$ einen abgeschlossenen Kreisbereich mit Zentrum p und Radius ρ anzeigt. Die für alle ρ des Intervalls $(0, \sigma)$ festbleibende Figur $U(p, A)$ ist offensichtlich eine abgeschlossene Teilmenge des Einheitskreisbereiches $K_1(p)$; wir nennen sie das Umgebungsbild von p bezüglich A. Je nach der Lage von p relativ zu A lassen sich sechs Typen bilden, deren Unterscheidung in unserem Zusammenhang relevant sein wird.

Fall I: $p \in \operatorname{cmpl} A$
Fall II: $p \in \operatorname{int} A$
Fall III: $p \in \operatorname{relint} S$, S einseitige Randstrecke von A
Fall IV: $p \in \operatorname{relint} S$, S zweiseitige Randstrecke von A
Fall V: p nicht unter den Fällen I bis IV und nicht isoliert
Fall VI: p isoliert.

Die sechs Lagen von p bezüglich A sind in Abbildung 1 aufgewiesen und die zugehörigen Umgebungsbilder $U(p, A)$ in Abbildung 2 dargestellt. Im Fall I ist $U(p, A)$ leer. In den Fällen II bis V besteht $U(p, A)$ aus $n = n(p) \in \mathbf{N}$ Einheitskreissektorbereichen mit dem gemeinsamen Scheitel p und den Zentriwinkeln θ_i $(i = 1, \ldots, n)$. Insbesondere ist im Fall II $U(p, A)$ ein Vollkreis, $n = 1$, $\theta_1 = 2\pi$. Im Fall III ist $U(p, A)$ ein Halbkreis, $n = 1$, $\theta_1 = \pi$. Im Fall IV besteht $U(p, A)$ aus zwei Strecken, $n = 2$, $\theta_1 = \theta_2 = 0$.

Im allgemeinen Fall V ist $U(p, A)$ die Vereinigung von n Sektoren $(n \geqq 1)$ $0 \leqq \theta_i < 2\pi$ $(i = 1, \ldots, n)$. Im Fall VI ist $U(p, A)$ mit dem Punkt p identisch.

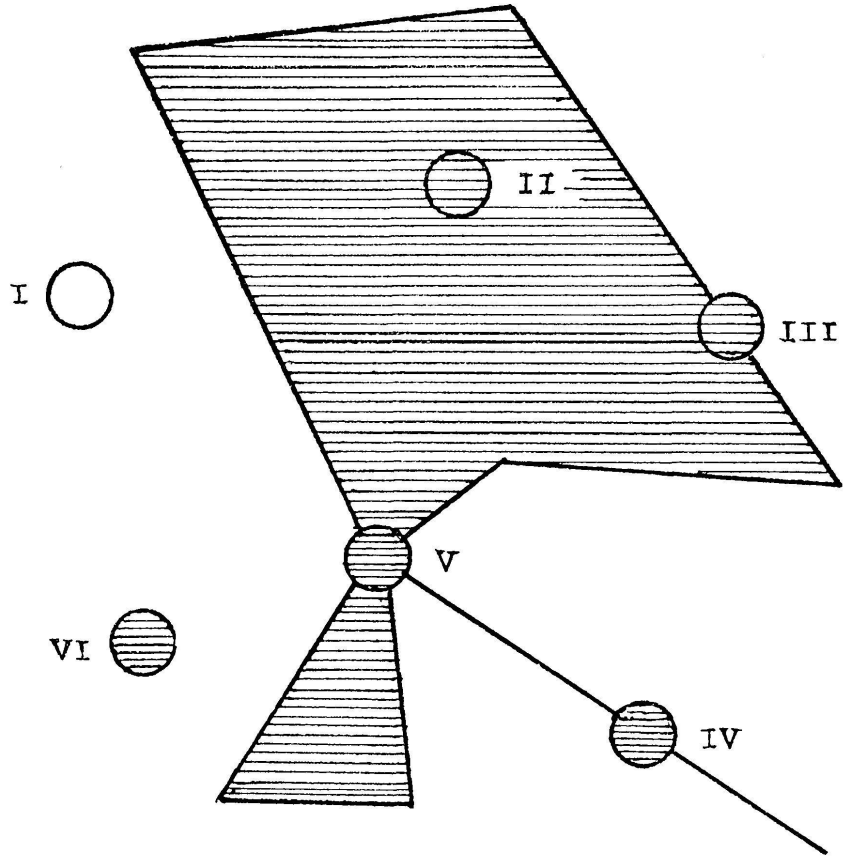


Abb. 1

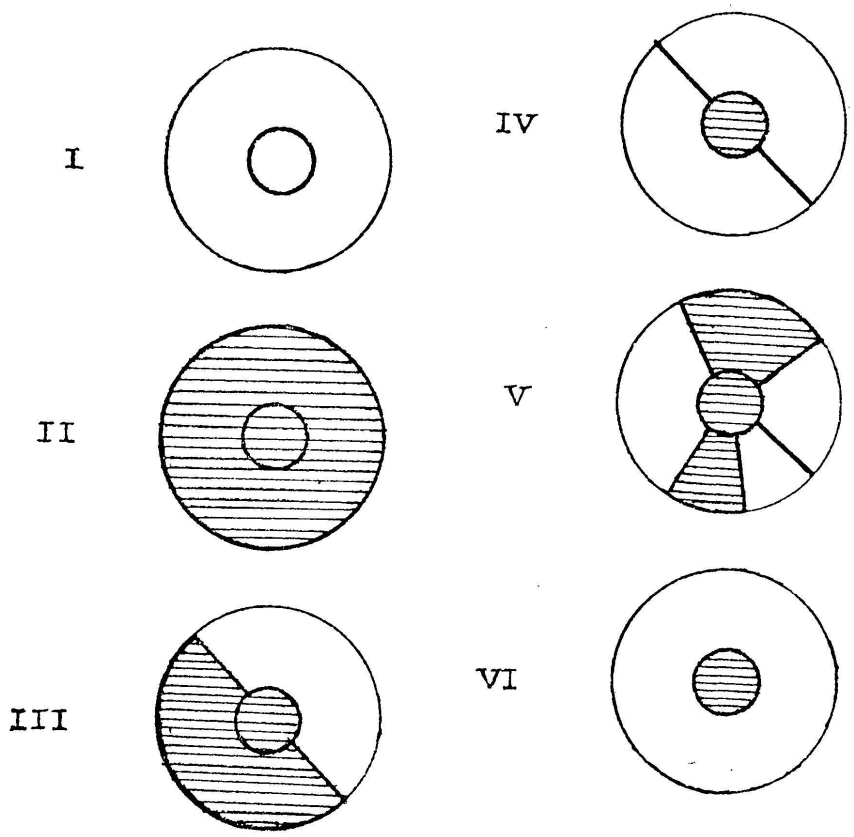


Abb. 2

Mit den nachfolgenden Ansätzen bilden wir drei Hilfsfunktionen, deren Werte sich nach den vorliegenden sechs Fällen richten, nämlich:

(2.5) $\alpha(p, A) = 0$ bzw 1 (Fall I bzw Fälle II, III, IV, V, VI);
(2.6) $\beta(p, A) = 0$ bzw $n(p)$ (Fälle I, II, VI bzw Fälle III, IV, V);
(2.7) $\gamma(p, A) = 0$ bzw $\Sigma_1^n \theta_i$ (Fälle I, VI bzw Fälle II, III, IV, V).

Mit $\Phi(p, A) = \alpha(p, A)$, $\beta(p, A)$, $\gamma(p, A)$ sind nun drei spezielle Lösungen des Additionstheorems (2.4) gegeben. Die Additivität von α und γ ist nahezu trivial; ihr Nachweis bei β sei hier als kombinatorisch-geometrische Uebungsaufgabe gedacht. Nun setzen wir

(2.8) $$\omega(p, A) = \alpha(p, A) - (1/2)\beta(p, A) - (1/2\pi)\gamma(p, A),$$

und haben durch Linearkombination offensichtlich eine weitere Lösung $\Phi(p, A) = \omega(p, A)$ von (2.4) konstruiert.

In der nachfolgenden Tabelle sind die Werte der drei Hilfsfunktionen α β γ und von ω eingetragen, die sich für Punkte mit den Umgebungsbildern der Typen I bis IV ablesen lassen:

	α	β	γ	ω
I	0	0	0	0
II	1	0	2π	0
III	1	1	π	0
IV	1	2	0	0

Wie wir also festellen, gilt

(2.8) $$\omega(p, A) = 0 \text{ (Fälle I, II, III, IV).}$$

Nichtverschwindende Werte der Funktion ω ergeben sich demnach nur in den Fällen V, VI, d.h. für Punkte $p \in E$, die nicht im Aeussern, nicht im Innern, nicht im relativen Innern von einseitigen Randstrecken und auch nicht von zweiseitigen Randstrecken des Polygons A liegen. Nach Definition sind das genau die Eckpunkte von A. Da es aber lediglich endlich viele Eckpunkte gibt, existiert die formal über alle Punkte p der Ebene E zu erstreckende Summe

(2.9) $$\chi(A) = \sum_p \omega(p, A),$$

da nur endlich viele Summanden nicht verschwinden. Mit diesem Ansatz ergibt sich eine nur von A abhängige reelle Zahl. Damit wird eine über dem

Polygonverband $\mathfrak{P}$ definierte Funktion erzielt, die im Hinblick auf die für $\omega(p, A)$ als gültig erkannte Beziehung (2.4) evidenterweise eine Lösung des für uns entscheidenden Additionstheorems (2.3) sein muss. Es sei nun p ein Eckpunkt von A (Fälle V, VI). Es gilt dann

$$\alpha(p, A) = 1 . \tag{2.10}$$

Bezeichnet $k(p) = 2\,n(p)$ die Anzahl der in p einmündenden Randstrecken von A, wobei jede zweiseitige Randstrecke mit der Vielfachheit 2 mitzuzählen ist, so ergibt sich

$$\beta(p, A) = (1/2)\,k(p) . \tag{2.11}$$

Zeigt schliesslich $g(p)$ die Summe der Innenwinkel von A in p an, so ist

$$\gamma(p, A) = g(p) . \tag{2.12}$$

Für einen isolierten Eckpunkt ist naturgemäss $k(p) = g(p) = 0$ zu setzen. Beachten wir, dass sich die Summation (2.9) de facto über die Eckpunkte von A erstreckt, so resultiert mit (2.8), (2.10), (2.11), (2.12) die Darstellung

$$\chi(A) = P(A) - (1/2)\,K(A) - (1/2\pi)\,G(A) , \tag{2.13}$$

wobei P die *Eckpunktzahl*, K die *Randstreckenzahl* und G die totale *Innenwinkelsumme* bedeuten. Hierbei ist zu bedenken, dass bei der Summierung aller Beiträge $k(p)$ jede Randstrecke doppelt gezählt wird, da diese durch zwei Eckpunkte begrenzt ist. Ferner ist bei der Verwendung dieser Darstellung darauf zu achten, dass jede zweiseitige Randstrecke mit der Vielfachheit 2 in Rechnung zu stellen ist.

Ist nun A leer ($P = K = G = 0$), so ergibt sich $\chi(\varnothing) = 0$, womit die Nullkonvention (2.1) erfüllt wird. Ist A ein eigentliches Eipolygon, also ein nichtentartetes m-Eck ($P = m, K = m, G = (m-2)\,\pi$), so folgt $\chi(A) = 1$, ein Resultat, das sich auch für ein uneigentliches Eipolygon, also für eine Strecke ($P = 2, K = 2, G = 0$) und für einen Punkt ($P = 1, K = 0, G = 0$) bestätigt. Demnach ist auch die Forderung (2.2) befriedigt. Fassen wir zusammen: Das durch die Eckpunktzahl, Randstreckenzahl und Innenwinkelsumme gemäss (2.13) gebildete Polygonfunktional χ ist somit eine Charakteristik, da die drei kennzeichnenden Postulate (2.1), (2.2) und (2.3) erfüllt sind. Damit ist der Existenzbeweis beendent.

2.3 Eindeutigkeitsbeweis

Wir zeigen nun, dass es andererseits höchstens eine Charakteristik geben kann. Sei also $\tilde{\chi}$ eine Polygonfunktion, welche den Forderungen (2.1), (2.2), (2.3) genügt. Ist $A \in P$ ein beliebiges Polygon, so gibt es eine Darstellung $A = \cup_1^n A_i$ als Vereinigung der n Eipolygone $A_i \in \mathfrak{K}$ $(i=1, ..., n)$. Mit Iteration des Additionstheorems (2.3) resultiert die induktiv leicht nachweisbare Formel

$$\tilde{\chi}(A) = \sum{}^1 \tilde{\chi}(A_i) - \sum{}^2 \tilde{\chi}(A_i \cap A_k) + \ldots, \tag{2.14}$$

wobei sich die Summation $\sum^m$ über alle $\binom{n}{m}$ Kombinationen der Indizes $\{1, ..., n\}$ der m-ten Klasse zu erstrecken hat. Natürlich gilt die gleiche Formel ebenso für die im vorstehenden Abschnitt konstruierte Charakteristik χ, so dass auch

$$\chi(A) = \sum{}^1 \chi(A_i) - \sum{}^2 \chi(A_i \cap A_k) + \ldots \tag{2.15}$$

gelten muss. Mit Rücksicht auf (2.1), (2.2) und Berücksichtigung der Tatsache, dass die Eipolygonklasse $\mathfrak{K}$ bezüglich der Schnittbildung geschlossen ist, sind nun die rechts von (2.14) und (2.15) auftretenden Therme bei den Durchschnitten gleicher Indizeskombinationen gleich, so dass auf

$$\tilde{\chi}(A) = \chi(A) \tag{2.16}$$

geschlossen werden kann. Damit ist der Eindeutigkeitsbeweis beendet.

2.4 Die Eulersche Charakteristik

Die mit der Darstellungsformel (vgl. (2.13))

$$\chi(A) = P(A) - (1/2)\, K(A) - (1/2\pi)\, G(A) \tag{2.17}$$

gegebene Polygonfunktion ist, wie gezeigt wurde, die einzig mögliche Charakteristik. Es handelt sich um die in sachlich- und historischer Beziehung ausgezeichnete *Eulersche Charakteristik*.

Abbildung 3 zeigt einige einfache Polygone mit einer Tabelle, welche der Ermittlung von χ gemäss (2.17) dient. Naturgemäss hat χ noch andere

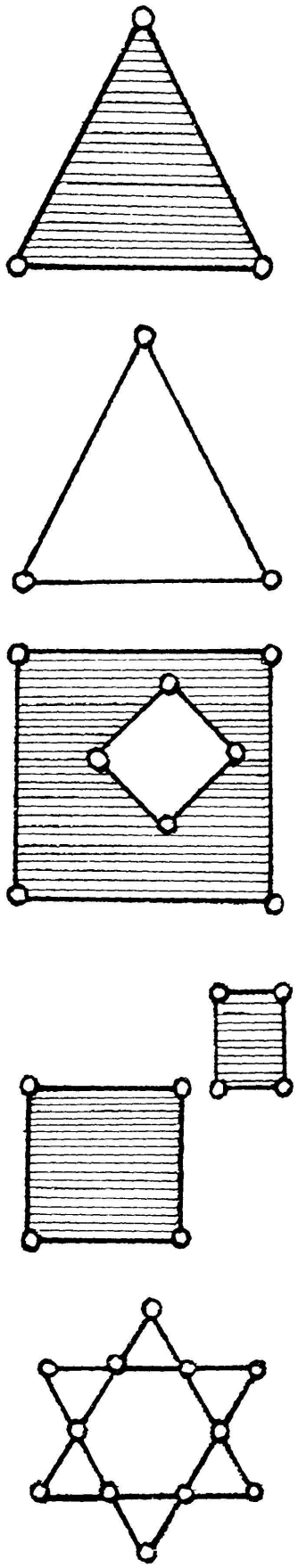
a

b

c

d

e



	P	K	G	χ
a	3	3	π	1
b	3	6	0	0
c	8	8	8π	0
d	8	8	4π	2
e	12	36	0	— 6

Abb. 3

nennenswerte Eigenschaften, deren Erläuterungen wir hier unterlassen müssen. Es sei lediglich die bedeutsame und nützliche Beziehung

$$\chi(A) = c(A) - c^*(A) + 1 \tag{2.18}$$

genannt, wo c die Anzahl der Komponenten von A und c^* die Anzahl der Komponenten von $A^* = \operatorname{cmpl} A$ anzeigt (Komponente einer Punktmenge ist kurz gesagt eine grösste zusammenhängende Teilmenge). Diese Relation lässt die enge Beziehung erkennen, die zwischen Euler-Charakteristik und topologischen Sachverhalten besteht, und sie deutet offenkundig darauf hin, dass χ eine topologische Invariante darstellt. Ihre Begründung und Anwendbarkeit innerhalb der Elementarmathematik liegt im Grenzgebiet zwischen metrischer Geometrie und Topologie. Wie ersichtlich befindet sich die Formel (2.17) diesseits und (2.18) schon jenseits der angedeuteten Grenze. Hier ist auch die Grenzschicht, wo sich die schulmässige Elementargeometrie sehr leicht mit Problemen in Kontakt bringen lässt, die in die wissenschaftliche Forschung hineinweisen, vor allem dann, wenn man sich vom ebenen Fall, mit dem wir uns hier ausschliesslich befasst haben, loslöst.

Hier sind zahlreiche Verwendungsmöglichkeiten der Eulerschen Charakteristik in der kombinatorischen Geometrie, der diskreten Geometrie, der stochastischen Geometrie uam. zu nennen, doch müssen wir uns hier mit einem flüchtigen Hinweis begnügen.

(Reçu le 21 mai 1973)

H. Hadwiger
Mathematisches Institut
Universität Bern
Sidlerstrasse 5
3000 Bern

vide-leer-empty