

PETITE ENFANCE DE LA TOPOLOGIE ALGÈBRIQUE

Autor(en): **Pont, Jean-Claude**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1974)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-46897>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

PETITE ENFANCE DE LA TOPOLOGIE ALGÈBRIQUE

par Jean-Claude PONT

§ 1. — INTRODUCTION

Cet article, tiré d'une conférence que j'ai faite au Cercle mathématique de Lausanne au mois de février 1973, résume, quelque peu sommairement, une étude sur la topologie algébrique avant les travaux de Poincaré ¹).

En 1679, Leibniz forgea le terme *analysis situs*, repris par Euler, Gauss, Riemann, Poincaré. Le vocable topologie, introduit par Listing en 1836, l'a maintenant remplacé.

Bien qu'on ne le trouve nulle part écrit, les figures étudiées par les mathématiciens de la période qui nous occupe sont toujours supposées triangulables, c'est-à-dire qu'on peut les recouvrir par un nombre fini ou infini dénombrable de segments, de triangles, de tétraèdres, etc. Ces figures se prêtent donc par nature à une décomposition polyédrale, qui à son tour est représentable par un schéma, dont l'étude combinatoire permet d'analyser, au point de vue topologique, la figure qui le définit. Cette attitude est assez restrictive pour éliminer les ensembles dont l'étude topologique entraîne des difficultés ensemblistes, tout en étant suffisamment large pour englober presque toutes les figures intéressantes. Le propre de la topologie combinatoire est donc de substituer des schémas aux ensembles de points considérés. Or l'étude de ces schémas relève de l'algèbre linéaire et de la théorie des groupes. L'algèbre prend ainsi possession de la topologie combinatoire. Cela explique pourquoi l'expression topologie combinatoire fut remplacée, vers 1940, par la dénomination topologie algébrique, mieux adaptée aux méthodes de cette science. Il serait donc vain de chercher une solution de continuité entre la topologie combinatoire des origines et la topologie algébrique.

La notion de fonction continue est centrale en topologie; les propriétés que l'on établit dans cette discipline sont donc intimement liées à celles

¹ Jean-Claude Pont, *La topologie algébrique, des origines à Poincaré*, Presses Universitaires de France, Paris 1974.

des fonctions continues. Or, à nul endroit la fonction continue n'est davantage chez elle qu'en analyse. De là à concevoir une étroite corrélation entre ces deux disciplines, il n'y a qu'un petit pas, allègrement franchi par les mathématiciens du xx^e siècle. Prenant pour réflexion la fonction continue, qu'elle rapporte aux concepts de voisinages ouverts et fermés, la topologie générale prend rapidement ses distances à l'égard du modèle que lui fournit l'espace euclidien, pour s'élever à un haut degré de généralité en raisonnant sur des ensembles quelconques, dont des parties convenablement choisies sont considérées a priori comme des ensembles ouverts. La fonction continue se définit *ipso facto* et avec elle apparaît le problème de la caractérisation topologique de ces ensembles. Ce point de vue s'est développé à partir des notions d'espace métrique (M. Fréchet, 1906) et d'espace topologique (F. Hausdorff, 1914). Vers 1925, les deux topologies, aux traits pourtant si fortement marqués, aux méthodes si nettement différenciées dans la première période, tendent à se confondre à la suite des travaux de Brouwer, Lefschetz, Alexandroff, Hopf et tant d'autres ¹.

L'origine de la topologie et les travaux de Poincaré sont les limites naturelles de cette histoire. Avec les recherches du grand savant français — qui écrit à lui seul à peu près autant de pages sur la topologie que tous les auteurs rencontrés dans notre histoire — *l'analysis situs* gagne en effet ses lettres de noblesse, et devient une discipline autonome des mathématiques.

§ 2. — LES PONTS DE KOENIGSBERG

L'histoire de la topologie commence peut-être en 1736, quand Euler reconnaît un aspect particulier dans un problème que rien, de prime abord, ne distingue de ses homologues de la géométrie élémentaire. Il s'agit du problème des ponts de Koenigsberg qu'Euler pose en ces termes: « A Koenigsberg, en Prusse, il y a une île A appelée le Kneiphof, entourée d'un fleuve qui se partage en deux bras, comme on peut le voir sur la

¹ On trouvera des précisions sur la genèse de la topologie ensembliste jusqu'aux travaux de Hausdorff dans le livre de J. H. Manheim, *The genesis of point set topology*, Pergamon Press, New-York 1964.

Pour quelques développements plus récents, voir H. Hopf, Ein Abschnitt aus der Entwicklung der Topologie, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, pp. 182-192. Bd. 6, 1966.

S. Lefschetz, The early development of algebraic topology, *Boletim da sociedade Brasileira de matematica*, pp. 1-48, 1970.

J. Bollinger, Geschichtliche Entwicklung des Homologiebegriffes, *Archive for history of science*, Vol. 9, number 2, 1972, pp. 94-166,

figure 1, mais les bras de ce fleuve sont garnis de sept ponts a, b, c, d, e, f, g, et l'on proposait cette question sur ces ponts: une personne peut-elle s'arranger de manière à passer une fois sur chaque pont, mais une fois seulement? Les uns affirmaient que cela était possible; d'autres niaient; mais personne ne pouvait prouver. Quant à moi, j'ai fait de ce problème le suivant beaucoup plus général: quelle que soit la figure du fleuve et sa distribution en bras, et quel que soit aussi le nombre de ponts, trouver si une personne peut traverser le fleuve en passant une seule fois sur chaque pont.»

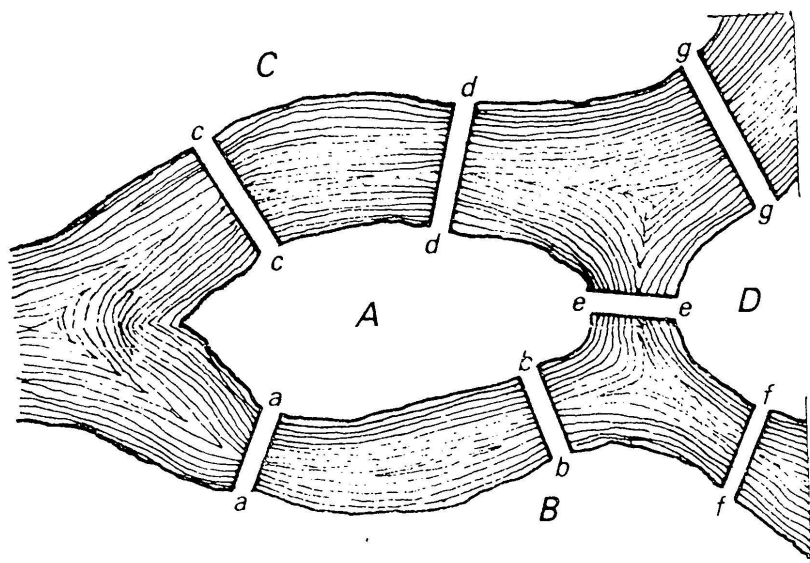


Fig. 1

L'important ici n'est pas tant la solution d'Euler, pas plus que la méthode qu'il utilise, mais le commentaire qui accompagne ce problème: « Outre cette partie de la géométrie qui traite des grandeurs et qui a été de tout temps cultivée avec beaucoup de zèle, il en est une autre, jusqu'à nos jours complètement inconnue, dont Leibniz a fait le premier mention et qu'il appela géométrie de position. D'après lui, cette partie de la géométrie s'occupe de déterminer seulement la position et de chercher les propriétés qui résultent de cette position; dans ce travail, il n'est besoin ni d'avoir égard aux grandeurs elles-mêmes, ni de les calculer; mais il n'est pas encore assez bien établi quels sont les problèmes de ce genre appartenant à la géométrie de position, et quelle méthode il faut employer pour les résoudre; c'est pourquoi lorsque récemment il fut question d'un problème qui semblait, à la vérité, se rattacher à la géométrie ordinaire, mais dont cependant la solution ne dépendait, ni de la détermination de grandeurs, ni du calcul de quantités, je n'ai point balancé à le rapporter à la géométrie de position, d'autant plus que les considérations de position entrent seules dans la

solution, tandis que le calcul n'y est pour rien. J'ai donc cru utile d'exposer ici, comme un exemple de géométrie de position, la méthode que j'ai trouvée pour résoudre les problèmes de ce genre.»

Avant de poursuivre, remarquons ceci. D'une façon schématique, on peut répartir les découvertes mathématiques en deux classes :

— Il y a pour commencer celles qui sont autant d'une époque que d'un homme, celles qui s'inscrivent naturellement dans le continuum de la pensée, en bref, celles qui n'auraient pas pu ne pas être. « Lorsqu'il a neigé tout l'hiver durant, la patte d'un lièvre suffit à déclencher l'avalanche.»

— Et puis, il y a les découvertes qui sont accidentelles, qui ne s'inscrivent pas dans le cadre d'un temps, qui font bande à part.

Le problème des ponts, qui est peut-être l'acte de naissance de la topologie, appartient à cette deuxième classe : il n'eut guère d'influence sur le développement de la topologie. Il devait en aller autrement du théorème d'Euler sur les polyèdres.

§ 3. — LE THÉORÈME D'EULER SUR LES POLYÈDRES

3.1 Euler : Lorsqu'on se propose de désigner les lignes polygonales du plan, il faut se rappeler le nombre des côtés qui la limitent. Vers 1750, Euler recherche une classification analogue pour les polyèdres ; il remarque que le nombre des sommets peut à ce point différer du nombre des faces, qu'il faut les indiquer tous deux (tétraèdre hexagone, pentaèdre hexagone, etc.). Cette classification n'est pas non plus satisfaisante, et se présente alors naturellement l'idée de faire appel au troisième nombre caractéristique : le nombre des arêtes. Cependant, comme le montre l'examen de quelques cas, ce nombre est déterminé par les deux autres. De cette dernière constatation découle ce qu'il est convenu d'appeler le théorème d'Euler pour les polyèdres, publié en 1752 : dans tout polyèdre $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2$ (où α_0 , α_1 , α_2 représentent respectivement le nombre de sommets, d'arêtes et de faces)¹).

L'importance de ce théorème pour notre sujet apparaît clairement si l'on songe que l'histoire de la topologie, jusqu'en 1851, se confond, à de rares exceptions près, avec l'histoire du dit théorème. Aussi doit-on s'y arrêter quelque peu.

¹ On accorde parfois à Descartes la paternité de ce théorème ; j'ai examiné, dans l'ouvrage cité à la page 1, (pp. 8-13) ce qu'il faut penser de cette opinion.

Il faut d'abord observer que l'énoncé d'Euler est trop général; le théorème n'est en effet valable que pour les polyèdres homéomorphes à la sphère. Le nombre $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$, qu'on appelle la caractéristique d'Euler, est un invariant topologique, et le théorème d'Euler est une proposition de l'*analysis situs*. Aussi curieux que cela puisse paraître, Euler ne l'a pas remarqué, lui qui avait créé la topologie quelques années plus tôt. Il ne comprit donc pas le véritable intérêt de la proposition, lequel ne pouvait d'ailleurs être mis en évidence que par celui qui montrerait qu'elle n'est pas toujours vraie, comme devait le faire Lhuilier.

La démonstration qu'Euler donne de son théorème n'est pas correcte ¹). Il faut attendre 1794 pour rencontrer la première démonstration satisfaisante, pour les polyèdres convexes. On la doit à Legendre.

3.2 *Lhuilier* : Simon Lhuilier est né à Genève en 1750. Ses premiers travaux portent sur le problème de l'isopérimétrie dans la pyramide. Son *Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs* remporte en 1786 le grand prix mathématique de l'Académie de Berlin. Après quelques années de préceptorat à Varsovie, il regagne Genève, où il enseigne jusqu'en 1825. Il meurt en 1840.

Dans un mémoire publié en 1813, Lhuilier fait voir que le théorème d'Euler a des exceptions; il les analyse minutieusement. Son principal résultat est que pour un polyèdre percé de n cavités, qui le traversent de part en part, on a $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = -2(n-1)$. Le nombre n est le genre du polyèdre, qui joue un rôle de premier plan en topologie des surfaces.

3.3 *von Staudt* : Lhuilier est donc le premier à remarquer que l'énoncé d'Euler souffre de nombreuses exceptions. Il doit cependant se contenter de décrire ce qu'on pourrait nommer, se plaçant dans l'esprit de l'époque, des cas pathologiques, sans être à même de les caractériser par des propriétés géométriques. C'est en 1847 que von Staudt présente enfin le théorème d'Euler avec des hypothèses satisfaisantes: « Lorsque l'on peut joindre chaque sommet d'un polyèdre à tout autre par une ligne formée d'arêtes, et lorsque sa surface est partagée en deux parties, par toute ligne fermée composée d'arêtes, passant au plus une fois par un même sommet, on a... » ²).

3.4 *Schläfli* : Ludwig Schläfli est né à Berne en 1814; il enseigne au gymnase de Thoune jusqu'en 1848, puis à l'Université de Berne jusqu'à

¹ Voir op. cité (pp. 16-19).

² On trouvera la remarquable démonstration de von Staudt dans l'ouvrage cité, p. 28.

sa mort, survenue en 1895. Ludwig Schläfli est l'un des plus grands mathématiciens de son temps, et il faut le placer immédiatement après Euler dans la hiérarchie des mathématiciens suisses. On lui doit de remarquables découvertes dans tous les domaines des mathématiques: à côté de quelques mémoires sur les fonctions elliptiques, la théorie des nombres et la théorie des systèmes d'équations algébriques, il s'est occupé avec brio de la théorie des surfaces du troisième ordre, de la théorie des polyèdres de l'espace à n dimensions; il est le co-inventeur de la loi d'inertie de Sylvester; il a découvert la non-orientabilité du plan projectif, la réduction des matrices orthogonales; en géométrie différentielle, c'est lui qui a trouvé les conditions pour qu'une variété soit à courbure constante (il faut que ses géodésiques apparaissent comme droites dans un certain système de coordonnées). Il s'est intéressé au problème des rapports entre les formes non euclidiennes et l'espace physique, etc. Apprécié à sa juste valeur par tous les grands de la mathématique de son temps, il reçoit en 1870, consécration suprême, le prix Steiner de l'Académie de Berlin ¹. Vers 1850, Schläfli met la dernière main à un manuscrit d'un intérêt considérable. Il décrit lui-même son travail comme « ... visant à fonder et à développer un nouveau rameau de l'analyse, qui soit, en même temps, une géométrie analytique à 2 et 3 dimensions. Comme la géométrie ordinaire peut être nommée théorie d'un continu trois fois étendu, j'ai nommé ma théorie, théorie d'un continu multiplement étendu. » Malheureusement, l'ampleur du mémoire empêche sa publication; il ne voit finalement le jour qu'en 1901, six ans après la mort de son auteur.

Son importance pour notre histoire provient de ce qu'il contient la relation $\sum_1^{n-1} (-1)^m \alpha_m + (-1)^n = 1$, qui est la généralisation du théorème d'Euler au cas de l'espace à n dimensions.

§ 4. — GAUSS-LISTING

Après un siècle d'histoire, le théorème d'Euler a parcouru toutes les étapes réservées à un honnête théorème: apparition empirique, énoncé approximatif, démonstration dans un cas particulier, énoncé exact, généralisation. On doit cependant remarquer que, pendant tout ce siècle consacré au théorème d'Euler, on n'a guère parlé de topologie; ni Euler, ni Legendre,

¹ Voir J. J. Burckhardt, *Ludwig Schläfli*, Birkhäuser, Basel 1948, 23 p.

pas plus que Lhuilier, von Staudt ou Schläfli n'ont vu, ou signalé, le lien entre le théorème d'Euler et l'*analysis situs*. Gauss et son élève Listing vont combler cette lacune. Commençons par quelques rappels biographiques. Gauss est né en 1777. Par son comportement, on peut le rattacher aux savants du XVIII^e siècle: il ne publie presque pas, communique ses découvertes — quand il les communique — par ses conversations et par sa volumineuse correspondance. Il n'a guère d'élèves, tout au plus quelques disciples et collègues. C'est en 1794, soit au début de sa carrière scientifique que Gauss se lie d'amitié avec l'*analysis situs*; il l'utilise pratiquement et sciemment dans sa dissertation inaugurale de 1799, où il démontre le théorème fondamental de l'algèbre. A de nombreuses reprises par la suite, il mentionne la topologie et son importance pour les mathématiques dans sa correspondance et dans ses conversations ¹. L'extrait suivant, d'une lettre de Gauss à Hansen, écrite en 1825, fait bien voir la conception qu'il a de la topologie: « Vous avez entièrement raison de prétendre que dans toutes les constructions de cartes, la similitude dans les plus petites parties constitue la condition essentielle, que l'on ne peut négliger que dans des circonstances tout à fait spéciales. Il serait d'ailleurs utile de créer une dénomination propre aux représentations qui remplissent cette condition. En outre, elles ne sont que des cas particuliers de la représentation la plus générale d'une surface sur une autre qui, à chaque point de l'une, fait correspondre un point de l'autre, et ceci d'une façon continue.»

Dans un travail publié en 1827, consacré à la théorie des surfaces, et qui est l'un des principaux textes de Gauss, on voit le Prince des mathématiciens poser et étudier le problème de la déformation isométrique des surfaces; c'est une étape indispensable, qui préfigure et annonce l'étude, plus générale celle-là, des déformations topologiques. Dans ce même travail, Gauss introduit la courbure totale d'une surface, qui tiendra un si grand rôle dans le développement de la topologie. L'influence de Gauss sur l'évolution de l'*analysis situs* apparaît encore et surtout, à travers les travaux de Listing et ceux de Möbius-Klein.

Johann Benedikt Listing est né en 1808. Il arrive à Göttingen en 1829; il y devient élève assidu de Gauss, qui lui parle notamment de topologie. C'est Listing qui crée le mot topologie; on le trouve pour la première fois dans une lettre qu'il écrit en 1836 à l'un de ses amis ². En 1847, il publie un ouvrage intitulé *Vorstudien zur Topologie*, qui consacre l'entrée officielle

¹ Voir opuscule cité (p. 32-33).

² *idem* (p. 41-42).

du vocable topologie dans le cortège des termes mathématiques. Voici, tiré de l'introduction de ce livre, un passage significatif: « Lorsque l'on considère des formes spatiales, on peut se placer au point de vue de la quantité ou à celui de la qualité. Aussi variées que soient leurs méthodes et leur objet, les recherches de la géométrie accordent, dans leurs développements actuels, la priorité à la première catégorie; aussi, la géométrie a-t-elle de tout temps été regardée comme une partie de la science des grandeurs, ainsi d'ailleurs que son nom l'indique. Le deuxième point de vue, celui de la qualité, c'est-à-dire celui qui se rapporte aux questions de position et d'ordre, ne fut étudié en géométrie que pour autant qu'il fût possible de l'adapter à celui de la quantité.»

Et plus loin: « Si l'on fait abstraction des quelques rares contributions dont nous venons de parler, c'est de l'avenir que le côté qualitatif de la géométrie attendra son développement. L'étonnement que peut engendrer le fait que rien ne s'est accompli dans ce domaine du savoir, depuis l'instigation de Leibniz, se tempèrera peut-être si l'on songe aux multiples difficultés que l'on rencontre lors de la mise sur pied de méthodes efficaces et convenables, permettant de ramener l'intuition spatiale à des concepts, et à l'insuffisance de la langue. L'importance du sujet m'ayant été signalée par le plus grand géomètre de notre temps, je me suis essayé depuis longtemps à l'analyse de certains cas qui relèvent de cette science... Qu'il me soit permis d'utiliser pour ce genre de recherches sur les complexes spatiaux le mot topologie, en lieu et place de la dénomination *geometria situs* proposée par Leibniz, qui rappelle l'idée de mesure et qui, en outre, se rapproche par trop de l'expression géométrie de position, qu'il est d'usage d'employer dans un domaine différent de celui que nous considérons. Par topologie, nous entendrons donc l'étude des aspects qualitatifs des formes spatiales ou des lois de la connexion, de la position mutuelle et de l'ordre des points, droites, surfaces, corps, ainsi que de leurs parties ou de leurs réunions, abstraction faite de leurs rapports de mesure et de grandeur... Pour s'élever au rang d'une science exacte, vers lequel tout semble l'appeler, la topologie doit chercher à ramener les faits, qui lui sont suggérés par l'intuition spatiale, à des concepts aussi simples que possibles...»

Le second travail topologique de Listing date de 1861. Dans ce très long mémoire, l'effort de Listing se porte sur l'extension du théorème d'Euler au cas des complexes spatiaux les plus généraux. Il essaye de déterminer l'influence de la nature topologique de chaque constituant du complexe sur la caractéristique d'Euler, en faisant nommément appel à

la topologie. Il attribue, à chaque constituant, un nombre, son ordre de cyclodicité, à qui il reconnaît la nature d'un invariant topologique. C'est là une nouveauté de taille. On doit toutefois préciser que Listing est passé à côté du problème fondamental de la topologie des surfaces. En outre, bien qu'il ait le premier mentionné dans ses écrits cette surface que l'on appelle le ruban de Möbius, il n'a pas conçu, même en principe, une théorie topologique des surfaces non orientables.

§ 5. — RIEMANN

A. 1851 marque un tournant dans notre histoire. C'est au cours de cette année que Riemann, âgé de 25 ans, écrit ses *Principes fondamentaux pour une théorie générale des fonctions d'une grandeur variable complexe* (Dissertation inaugurale); à cette occasion, Riemann est conduit à utiliser des notions qui ressortissent, à l'*analysis situs*. Cet événement est doublement important. D'abord, parce que, dès maintenant la topologie cesse d'être un simple jeu de l'esprit pour devenir un auxiliaire précieux dans cette théorie des fonctions, à laquelle le XIX^e siècle finissant consacra le meilleur de ses forces. Ensuite, parce que dorénavant les problèmes topologiques vont être attaqués sur deux fronts; celui de la géométrie et celui de l'analyse.

Voyons pourquoi Riemann a besoin de topologie, et ce que la topologie lui doit.

1. Etudiant l'expression $\int_c f(z) dz$, où f est une fonction holomorphe sur un domaine et c une courbe fermée, il montre qu'elle est nulle, pourvu que c soit contour total d'une portion de surface. Lorsque c ne remplit pas cette condition, le théorème conserve sa valeur grâce à l'introduction d'une ligne nouvelle — la section transverse — qui joint deux points situés sur chacune des frontières. En pratique, cette situation se présente quand la fonction possède une singularité, que l'on exclut à l'aide d'une courbe fermée. Ainsi apparaît en théorie des fonctions une classification des surfaces: surfaces simplement connexes celles qui ne nécessitent aucune section transverse, doublement connexes celles qui demandent une section, etc.

2. Confronté au difficile problème posé par les fonctions multiformes, Riemann eut l'idée d'attacher à chacune d'elles une surface qu'on appelle aujourd'hui la surface de Riemann de la fonction. Aux propriétés topologiques de la surface de Riemann correspondent pour les fonctions des

propriétés intéressantes. L'étude topologique des surfaces s'impose donc, lorsqu'on aborde la question de ce point de vue. On a trouvé dans les papiers de Riemann une ébauche non datée, intitulée *Fragment sur l'analysis situs*. On y voit Riemann tenter d'étendre au cas de n dimensions, les considérations topologiques développées pour les surfaces.

B. A la suite de Riemann, on doit encore citer :

Carl Neumann : il reprit les difficiles écrits de Riemann, les approfondit, les éclaira et les publia (1865) dans un ouvrage justement célèbre dans lequel toute une génération de mathématiciens s'est familiarisée avec les théories du maître de Göttingen et les idées topologiques du temps. C'est, à tout prendre, le premier manuel de topologie.

Enrico Betti : le mathématicien de Pise fut à l'époque le meilleur connaisseur des idées de Riemann. Depuis 1860, Riemann souffre de tuberculose, mal qui l'emporta d'ailleurs en 1866. Ses médecins lui conseillent le climat du sud. Riemann se rend en Italie où il se lie d'amitié avec Betti à qui il fait part de ses idées. Ce sont ces idées, concernant notamment des invariants topologiques pour les variétés à n dimensions que l'on appelle aujourd'hui les nombres de Betti, qui servent de base, pour ne pas dire plus, à un célèbre mémoire que Betti publie en 1871.

Félix Klein : suivi par plusieurs élèves, dont le plus connu est W. Dyck, Félix Klein va exploiter le filon découvert par Riemann et par contrecoup développer l'*analysis situs*.

§ 6. — MÖBIUS

Avec August Ferdinand Möbius, on revient à la géométrie. Möbius est né à Schulpforta en 1790; il étudie sous Gauss entre 1813 et 1814. Dès 1815, il enseigne à Leipzig jusqu'à sa mort en 1868. On lui doit d'importantes contributions en géométrie, en mécanique céleste et en statique.

Le fil d'Ariane des travaux topologiques de Möbius apparaît dans un livre — son œuvre principale — *Der barycentrische Calcul* publié en 1827. Ce fil d'Ariane est le concept de Verwandtschaft qu'on traduisait en ce temps par corrélation — on dit aujourd'hui transformation — que Möbius envisage d'abord dans des cas ordinaires (isométrie, similitude, affinité, colinéation); en 1855, il consacre un long mémoire à une corrélation qu'il nomme Kreisverwandtschaft, c'est-à-dire à cette corrélation qui transforme

des cercles en des cercles. Par ses travaux, Möbius a puissamment contribué à faire de la corrélation ce principe d'une rare fécondité que l'on rencontre aujourd'hui dans toutes les provinces des mathématiques. Aussi considère-t-on Möbius comme le principal précurseur du Programme d'Erlangen, dont nous parlerons tout à l'heure.

En 1858, âgé de 68 ans, il se laisse tenter par le problème mis au concours par l'Académie des sciences de Paris; il s'agissait de « Perfectionner en quelque point important la théorie géométrique des polyèdres. » Avant la date limite, fixée au 1^{er} juillet 1861, l'Académie reçoit huit mémoires, parmi lesquels celui de Möbius intitulé *Mémoire sur les polyèdres*. L'examen des manuscrits de Möbius montre que ce travail eut probablement pour but initial l'énumération de tous les polyèdres possibles de n sommets, mais que les formidables difficultés de ce problème détournèrent son auteur de la voie primitive, pour l'amener à étudier plus spécialement les questions d'aire et de volume des polygones et des polyèdres. Ce travail ne fut pas jugé digne du prix, malgré, ou peut-être à cause, de la grande nouveauté des résultats qu'il contenait. On doit cependant dire, à la décharge des examinateurs, qu'il est couvert de ratures et écrit dans un français désastreux. Le prix ne lui étant pas attribué — aucun d'ailleurs des huit auteurs n'en fut jugé digne — Möbius se décide à en publier de larges extraits dans deux mémoires parus en 1863 et 1865.

Je l'ai dit plus haut, l'idée de corrélation est l'âme de ce travail. Il s'agit cette fois-ci de corrélation élémentaire. Möbius la définit ainsi: « Deux figures seront dites en corrélation élémentaire lorsqu'à tout élément infiniment petit de l'une correspond un élément infiniment petit de l'autre, de telle manière qu'à deux éléments qui se touchent dans la première correspondent deux éléments qui se touchent dans la seconde; ou aussi: deux figures sont en corrélation élémentaire lorsqu'à tout point de l'une correspond un point de l'autre, de telle manière qu'à deux points infiniment voisins correspondent toujours deux points infiniment voisins. Dès lors, une ligne ne peut être en corrélation élémentaire qu'avec une autre ligne, une surface avec une surface et un corps spatial avec un corps spatial. » L'idée centrale de toute cette théorie est ainsi définie d'une façon claire, au moyen de termes auxquels on peut donner une signification mathématique précise. Cette définition a sur celles ayant cours à l'époque un avantage décisif: elle n'exige plus l'existence d'une déformation physique transformant une figure en une autre, mais simplement la possibilité d'établir une correspondance entre les éléments qui les constituent. On est maintenant en mesure de l'appliquer à des ensembles abstraits, sur lesquels l'intuition

n'a plus prise, et que l'on ne peut par conséquent pas déformer les uns dans les autres. Le but de ce premier mémoire est, comme Möbius l'indique, d'établir une classification des surfaces orientables du point de vue de la corrélation élémentaire, Il y parvient en attribuant à chaque surface un être mathématique, son schéma, qu'il simplifie ou manipule par des procédés qui ressemblent fort à ceux de l'algèbre ordinaire. A une échelle modeste, bien sûr, Möbius fait de la topologie algébrique. C'est également dans ce mémoire qu'il introduit, comme représentant de chaque classe de surfaces, des figures aujourd'hui classiques¹. Il démontre finalement le théorème fondamental: deux surfaces sont homéomorphes si et seulement si elles appartiennent à la même classe.

Le mémoire de 1865 s'intitule *Über die Bestimmung des Inhaltes eines Polyeders*. Ce travail présente et analyse le concept de surface à un côté. En fait, pour Möbius, le but de cette étude, comme son titre l'indique, est d'examiner la notion de volume d'un polyèdre, l'idée de surface à un côté n'étant qu'un auxiliaire. D'abord, Möbius innove en considérant la longueur d'un segment, l'aire d'une surface, le volume d'un polyèdre comme des nombres munis d'un signe, ce qu'il avait déjà fait dans son *Calcul barycentrique*. Puis il définit l'aire d'un polygone ordinaire, c'est-à-dire d'un polygone dont le périmètre ne se recoupe pas lui-même; il décompose pour cela la figure en triangles à partir d'un point quelconque; grâce aux considérations sur le signe, lorsqu'un même triangle apparaît p fois avec le signe $+$ et q fois avec le signe $-$, il l'écrit $p - q$ fois dans la somme finale. Dans le cas des polyèdres, il fait de même; pour démontrer que la somme des volumes des pyramides obtenues par décomposition à partir d'un point P ne dépend pas de P , il prend un deuxième point P' et montre que la différence des volumes engendrés par les deux décompositions est nulle. Au cours de ce raisonnement se présente une somme de tétraèdres, chacun d'eux étant compté deux fois; cette somme est nulle si les volumes s'éliminent deux à deux, c'est-à-dire s'ils sont de signe contraire. En dernière analyse, cela signifie que le polyèdre puisse être orienté de manière que chaque arête soit parcourue dans des sens opposés, selon qu'on la considère comme appartenant à une face ou à l'autre. C'est la loi des arêtes. Möbius se demande alors naturellement s'il existe des polyèdres qui ne vérifient pas cette loi. Il en a découvert, les a étudiés, en a compris le caractère topologique, les a popularisés sous la forme du ruban dont il a l'honneur de porter le nom. Malheureusement, il n'a pas essayé de situer ses « surfaces unilaté-

¹ Voir opusc. cité, p. 97.

rales » dans le cadre de sa classification de 1863. On le regrettera d'autant que notre auteur avait conscience de ce problème, comme l'atteste le texte écrit à l'intention du Grand-Prix. Nous l'avons vu plus haut, Listing a publié des considérations sur le ruban de Möbius en 1861 déjà. Il a donc la priorité de droit sur cette découverte. En fait, les archives de Möbius et de Listing établissent que c'est en juillet 1858 chez le premier, en septembre de la même année chez le second que cette surface apparaît. Cette concordance dans les dates mérite réflexion. En examinant de près cette question, j'ai acquis la conviction que le père du fameux ruban est en réalité l'inévitable Gauss¹. En tout état de cause, le nom par lequel on a coutume d'appeler cette surface est justifié. Pour Listing c'était uniquement une forme secondaire, faisant exception à celles qu'il étudiait, et juxtaposée mais non intégrée à son étude. Pour Möbius, au contraire, le ruban est un élément qui se présente naturellement et nécessairement. Möbius a défini l'homéomorphisme, pris en considération et résolu pour la première fois le problème de la classification des lignes et des surfaces orientables, ouvertes ou fermées, déterminé un invariant topologique: leur ordre de connexion, et ceci par voie originale, montré l'existence d'une relation entre ce nombre et la caractéristique d'Euler, abordé le problème de l'homéomorphisme entre corps de l'espace, introduit rigoureusement, et de l'intérieur, les surfaces « unilatérales ». Si Euler, Listing, Riemann et autres ont donné des béquilles à la topologie, Möbius lui a donné des ailes. Néanmoins, l'influence de son œuvre sur le développement de la topologie ne fut pas aussi importante que ce que l'on aurait été en droit d'attendre, ni la notoriété de Möbius ce qu'elle aurait dû être. Il est quasi certain que si l'Académie lui avait décerné le prix, amplement mérité par l'extraordinaire originalité du mémoire, ses résultats auraient eu une diffusion large et rapide; tandis que les quelques pages, d'une lecture relativement difficile, traitant d'un sujet ne paraissant se rattacher à rien, et qui plus est, parues dans un périodique d'ordre secondaire, n'eurent guère d'audience.

§ 8. JORDAN

Le premier des deux importants problèmes topologiques que Camille Jordan aborde au cours de l'année 1866 s'inspire d'une question traitée par Gauss en 1827: « Un des problèmes les plus connus de la géométrie est le suivant: Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour

¹ Voir opusc. cité, p. 109-110.

que deux surfaces ou portions de surfaces flexibles et inextensibles puissent être appliquées l'une sur l'autre sans déchirure ni duplication. On peut se proposer un problème analogue, en supposant au contraire, que les surfaces considérées soient extensibles à volonté. La question ainsi simplifiée rentre dans la géométrie de situation, et nous allons la résoudre en démontrant le théorème suivant :

Théorème. Pour que deux surfaces ou portions de surfaces flexibles et extensibles à volonté soient applicables l'une sur l'autre sans déchirure ni duplication, il faut et il suffit :

1. Que le nombre des contours séparés qui limitent respectivement ces deux portions de surfaces soient le même. (Si les surfaces considérées sont fermées, ce nombre est nul).

2. Que le nombre maximum des contours fermés ne se traversant ni eux-mêmes ni mutuellement nulle part, que l'on peut tracer sur chacune des deux surfaces sans la partager en deux régions séparées, soit le même de part et d'autre.»

Le second travail de Jordan est lui complètement neuf : « Deux contours fermés quelconques, tracés sur une surface donnée, seront dits réductibles l'un à l'autre, si l'on peut passer de l'un à l'autre par une déformation progressive.

« Deux contours quelconques tracés sur un plan sont toujours réductibles l'un à l'autre ; mais il n'en est pas de même sur toute surface : ainsi, par exemple, il est clair que dans un tore un méridien et un parallèle forment deux contours irréductibles.

» Nous nous proposons ici de déterminer dans quels cas deux contours, tracés sur une surface donnée, sont réductibles l'un à l'autre.»

Jordan est ainsi le père de la notion d'homotopie. Une étude détaillée de son texte fait voir qu'il est passé tout près de l'idée de groupe fondamental, en quoi Poincaré reconnaîtra un outil d'une grande efficacité pour la topologie.

§ 9. FELIX KLEIN ET LE PROGRAMME D'ERLANGEN

En 1872, Felix Klein âgé de 25 ans, présente un travail dont l'intérêt pour l'histoire des mathématiques, et en particulier pour l'histoire de la topologie, est considérable. La genèse de ce texte — qu'on appelle le Pro-

gramme d'Erlangen parce qu'il fut lu par Klein à l'université de cette ville comme dissertation inaugurale — n'a pas été étudiée de manière systématique par les historiens des mathématiques. En première approximation, on peut dire que les idées maîtresses du Programme procèdent de trois sources, qui alimentent par ailleurs le gros de la pensée mathématique au XIX^e siècle.

— Il s'agit d'abord de l'idée de transformation d'une surface dans une autre, de correspondance entre ensembles géométriques, que nous avons vu apparaître et se développer par les soins de Gauss et de Möbius. C'est grâce à la forme saisissante dont Klein saura la vêtir, qu'elle deviendra l'une des clefs de la mathématique.

— Il s'agit ensuite de cette théorie des invariants, qui conduit Cayley à envisager dans un même schéma géométrie métrique et géométrie projective: celle-ci devenant partie de celle-là. Ce bien singulier résultat, Klein allait l'étendre en 1871 aux géométries non-euclidiennes. La remarquable unité qui se crée ainsi sous la houlette de la géométrie projective, préfigure et suggère celle encore plus complète que révélera le Programme d'Erlangen.

— Enfin, avec la redécouverte des travaux de Galois, vers 1846, l'idée de groupe, qui avait montré ce dont elle est capable à l'occasion d'une question célèbre et difficile, se diffuse promptement dans les cercles mathématiques. Klein saura s'en servir magistralement dans son Programme d'Erlangen.

Synthèse admirable de ces trois grandes conceptions, le Programme développe l'idée qu'une géométrie est l'étude des invariants d'un certain groupe de transformations. C'est un principe unificateur d'une étonnante efficacité qui apparaît. Dans cette optique, la topologie devient la géométrie du groupe des transformations topologiques.

§ 10. DYCK

Il serait indécent de quitter la petite enfance de la topologie algébrique, sans citer le mathématicien munichois Walther Dyck, aujourd'hui tombé dans l'oubli, et qui fut un personnage considérable de la mathématique allemande entre 1890 et 1920.

Dyck est né à Munich en 1856; élève favori, puis ami de Klein, on lui doit plusieurs travaux en théorie des fonctions et surtout en théorie des

groupes et en topologie, Il est durant de nombreuses années rédacteur aux *Mathematische Annalen*; il est aussi l'un des promoteurs de la célèbre *Encyclopédie des sciences mathématiques*. Ses contributions à la topologie paraissent en 1888 et 1890. Dyck y expose le problème fondamental de l'*analysis situs* en termes précis, le traite rigoureusement, par une méthode qui lui est propre, dans le cas de une et deux dimensions puis présente une classification irréprochable des surfaces orientables et non orientables. Dans un second mémoire, il étend ses raisonnements au cas de l'espace à n -dimensions et découvre à cette occasion trois théorèmes, qui devraient suffire à lui assurer l'immortalité:

— La caractéristique d'Euler d'une n -sphère est 2 ou 0, selon que n est pair ou impair;

— La caractéristique de l'espace projectif est 1 ou 0, selon que n est pair ou impair;

— L'espace projectif est orientable ou non orientable, selon que n est impair ou pair.

Dans ses travaux topologiques, Dyck allie à une brillante synthèse des idées de ses prédécesseurs, un remarquable apport original.

(Reçu le 13 septembre 1973)

Jean-Claude Pont
Glarey 40 B
CH-3960 — Sierre