

## §2. — Les ponts de Koenigsberg

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1974)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

des fonctions continues. Or, à nul endroit la fonction continue n'est davantage chez elle qu'en analyse. De là à concevoir une étroite corrélation entre ces deux disciplines, il n'y a qu'un petit pas, allègrement franchi par les mathématiciens du XX<sup>e</sup> siècle. Prenant pour réflexion la fonction continue, qu'elle rapporte aux concepts de voisinages ouverts et fermés, la topologie générale prend rapidement ses distances à l'égard du modèle que lui fournit l'espace euclidien, pour s'élever à un haut degré de généralité en raisonnant sur des ensembles quelconques, dont des parties convenablement choisies sont considérées a priori comme des ensembles ouverts. La fonction continue se définit *ipso facto* et avec elle apparaît le problème de la caractérisation topologique de ces ensembles. Ce point de vue s'est développé à partir des notions d'espace métrique (M. Fréchet, 1906) et d'espace topologique (F. Hausdorff, 1914). Vers 1925, les deux topologies, aux traits pourtant si fortement marqués, aux méthodes si nettement différenciées dans la première période, tendent à se confondre à la suite des travaux de Brouwer, Lefschetz, Alexandroff, Hopf et tant d'autres <sup>1</sup>.

L'origine de la topologie et les travaux de Poincaré sont les limites naturelles de cette histoire. Avec les recherches du grand savant français — qui écrit à lui seul à peu près autant de pages sur la topologie que tous les auteurs rencontrés dans notre histoire — *l'analysis situs* gagne en effet ses lettres de noblesse, et devient une discipline autonome des mathématiques.

## § 2. — LES PONTS DE KOENIGSBERG

L'histoire de la topologie commence peut-être en 1736, quand Euler reconnaît un aspect particulier dans un problème que rien, de prime abord, ne distingue de ses homologues de la géométrie élémentaire. Il s'agit du problème des ponts de Koenigsberg qu'Euler pose en ces termes: « A Koenigsberg, en Prusse, il y a une île A appelée le Kneiphof, entourée d'un fleuve qui se partage en deux bras, comme on peut le voir sur la

---

<sup>1</sup> On trouvera des précisions sur la genèse de la topologie ensembliste jusqu'aux travaux de Hausdorff dans le livre de J. H. Manheim, *The genesis of point set topology*, Pergamon Press, New-York 1964.

Pour quelques développements plus récents, voir H. Hopf, Ein Abschnitt aus der Entwicklung der Topologie, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, pp. 182-192. Bd. 6, 1966.

S. Lefschetz, The early development of algebraic topology, *Boletim da sociedade Brasileira de matematica*, pp. 1-48, 1970.

J. Bollinger, Geschichtliche Entwicklung des Homologiebegriffes, *Archive for history of science*, Vol. 9, number 2, 1972, pp. 94-166,

figure 1, mais les bras de ce fleuve sont garnis de sept ponts a, b, c, d, e, f, g, et l'on proposait cette question sur ces ponts: une personne peut-elle s'arranger de manière à passer une fois sur chaque pont, mais une fois seulement? Les uns affirmaient que cela était possible; d'autres niaient; mais personne ne pouvait prouver. Quant à moi, j'ai fait de ce problème le suivant beaucoup plus général: quelle que soit la figure du fleuve et sa distribution en bras, et quel que soit aussi le nombre de ponts, trouver si une personne peut traverser le fleuve en passant une seule fois sur chaque pont.»

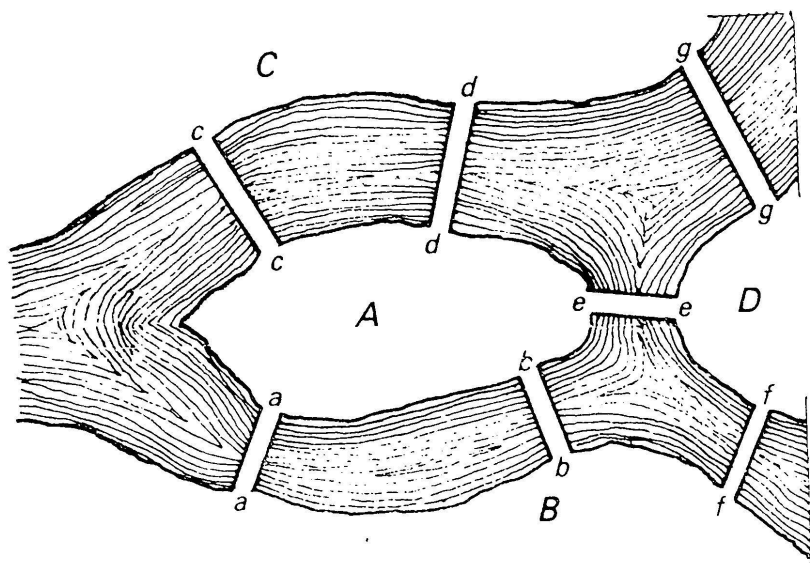


Fig. 1

L'important ici n'est pas tant la solution d'Euler, pas plus que la méthode qu'il utilise, mais le commentaire qui accompagne ce problème: « Outre cette partie de la géométrie qui traite des grandeurs et qui a été de tout temps cultivée avec beaucoup de zèle, il en est une autre, jusqu'à nos jours complètement inconnue, dont Leibniz a fait le premier mention et qu'il appela géométrie de position. D'après lui, cette partie de la géométrie s'occupe de déterminer seulement la position et de chercher les propriétés qui résultent de cette position; dans ce travail, il n'est besoin ni d'avoir égard aux grandeurs elles-mêmes, ni de les calculer; mais il n'est pas encore assez bien établi quels sont les problèmes de ce genre appartenant à la géométrie de position, et quelle méthode il faut employer pour les résoudre; c'est pourquoi lorsque récemment il fut question d'un problème qui semblait, à la vérité, se rattacher à la géométrie ordinaire, mais dont cependant la solution ne dépendait, ni de la détermination de grandeurs, ni du calcul de quantités, je n'ai point balancé à le rapporter à la géométrie de position, d'autant plus que les considérations de position entrent seules dans la

solution, tandis que le calcul n'y est pour rien. J'ai donc cru utile d'exposer ici, comme un exemple de géométrie de position, la méthode que j'ai trouvée pour résoudre les problèmes de ce genre.»

Avant de poursuivre, remarquons ceci. D'une façon schématique, on peut répartir les découvertes mathématiques en deux classes :

— Il y a pour commencer celles qui sont autant d'une époque que d'un homme, celles qui s'inscrivent naturellement dans le continuum de la pensée, en bref, celles qui n'auraient pas pu ne pas être. « Lorsqu'il a neigé tout l'hiver durant, la patte d'un lièvre suffit à déclencher l'avalanche.»

— Et puis, il y a les découvertes qui sont accidentelles, qui ne s'inscrivent pas dans le cadre d'un temps, qui font bande à part.

Le problème des ponts, qui est peut-être l'acte de naissance de la topologie, appartient à cette deuxième classe : il n'eut guère d'influence sur le développement de la topologie. Il devait en aller autrement du théorème d'Euler sur les polyèdres.

### § 3. — LE THÉORÈME D'EULER SUR LES POLYÈDRES

*3.1 Euler* : Lorsqu'on se propose de désigner les lignes polygonales du plan, il faut se rappeler le nombre des côtés qui la limitent. Vers 1750, Euler recherche une classification analogue pour les polyèdres ; il remarque que le nombre des sommets peut à ce point différer du nombre des faces, qu'il faut les indiquer tous deux (tétraèdre hexagone, pentaèdre hexagone, etc.). Cette classification n'est pas non plus satisfaisante, et se présente alors naturellement l'idée de faire appel au troisième nombre caractéristique : le nombre des arêtes. Cependant, comme le montre l'examen de quelques cas, ce nombre est déterminé par les deux autres. De cette dernière constatation découle ce qu'il est convenu d'appeler le théorème d'Euler pour les polyèdres, publié en 1752 : dans tout polyèdre  $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2$  (où  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  représentent respectivement le nombre de sommets, d'arêtes et de faces)<sup>1</sup>).

L'importance de ce théorème pour notre sujet apparaît clairement si l'on songe que l'histoire de la topologie, jusqu'en 1851, se confond, à de rares exceptions près, avec l'histoire du dit théorème. Aussi doit-on s'y arrêter quelque peu.

---

<sup>1</sup> On accorde parfois à Descartes la paternité de ce théorème ; j'ai examiné, dans l'ouvrage cité à la page 1, (pp. 8-13) ce qu'il faut penser de cette opinion.