

# §6. — Möbius

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1974)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

propriétés intéressantes. L'étude topologique des surfaces s'impose donc, lorsqu'on aborde la question de ce point de vue. On a trouvé dans les papiers de Riemann une ébauche non datée, intitulée *Fragment sur l'analysis situs*. On y voit Riemann tenter d'étendre au cas de  $n$  dimensions, les considérations topologiques développées pour les surfaces.

B. A la suite de Riemann, on doit encore citer :

*Carl Neumann* : il reprit les difficiles écrits de Riemann, les approfondit, les éclaira et les publia (1865) dans un ouvrage justement célèbre dans lequel toute une génération de mathématiciens s'est familiarisée avec les théories du maître de Göttingen et les idées topologiques du temps. C'est, à tout prendre, le premier manuel de topologie.

*Enrico Betti* : le mathématicien de Pise fut à l'époque le meilleur connaisseur des idées de Riemann. Depuis 1860, Riemann souffre de tuberculose, mal qui l'emporta d'ailleurs en 1866. Ses médecins lui conseillent le climat du sud. Riemann se rend en Italie où il se lie d'amitié avec Betti à qui il fait part de ses idées. Ce sont ces idées, concernant notamment des invariants topologiques pour les variétés à  $n$  dimensions que l'on appelle aujourd'hui les nombres de Betti, qui servent de base, pour ne pas dire plus, à un célèbre mémoire que Betti publie en 1871.

*Félix Klein* : suivi par plusieurs élèves, dont le plus connu est W. Dyck, Félix Klein va exploiter le filon découvert par Riemann et par contrecoup développer l'*analysis situs*.

## § 6. — MÖBIUS

Avec August Ferdinand Möbius, on revient à la géométrie. Möbius est né à Schulpforta en 1790; il étudie sous Gauss entre 1813 et 1814. Dès 1815, il enseigne à Leipzig jusqu'à sa mort en 1868. On lui doit d'importantes contributions en géométrie, en mécanique céleste et en statique.

Le fil d'Ariane des travaux topologiques de Möbius apparaît dans un livre — son œuvre principale — *Der barycentrische Calcul* publié en 1827. Ce fil d'Ariane est le concept de Verwandtschaft qu'on traduisait en ce temps par corrélation — on dit aujourd'hui transformation — que Möbius envisage d'abord dans des cas ordinaires (isométrie, similitude, affinité, colinéation); en 1855, il consacre un long mémoire à une corrélation qu'il nomme Kreisverwandtschaft, c'est-à-dire à cette corrélation qui transforme

des cercles en des cercles. Par ses travaux, Möbius a puissamment contribué à faire de la corrélation ce principe d'une rare fécondité que l'on rencontre aujourd'hui dans toutes les provinces des mathématiques. Aussi considère-t-on Möbius comme le principal précurseur du Programme d'Erlangen, dont nous parlerons tout à l'heure.

En 1858, âgé de 68 ans, il se laisse tenter par le problème mis au concours par l'Académie des sciences de Paris; il s'agissait de « Perfectionner en quelque point important la théorie géométrique des polyèdres. » Avant la date limite, fixée au 1<sup>er</sup> juillet 1861, l'Académie reçoit huit mémoires, parmi lesquels celui de Möbius intitulé *Mémoire sur les polyèdres*. L'examen des manuscrits de Möbius montre que ce travail eut probablement pour but initial l'énumération de tous les polyèdres possibles de  $n$  sommets, mais que les formidables difficultés de ce problème détournèrent son auteur de la voie primitive, pour l'amener à étudier plus spécialement les questions d'aire et de volume des polygones et des polyèdres. Ce travail ne fut pas jugé digne du prix, malgré, ou peut-être à cause, de la grande nouveauté des résultats qu'il contenait. On doit cependant dire, à la décharge des examinateurs, qu'il est couvert de ratures et écrit dans un français désastreux. Le prix ne lui étant pas attribué — aucun d'ailleurs des huit auteurs n'en fut jugé digne — Möbius se décide à en publier de larges extraits dans deux mémoires parus en 1863 et 1865.

Je l'ai dit plus haut, l'idée de corrélation est l'âme de ce travail. Il s'agit cette fois-ci de corrélation élémentaire. Möbius la définit ainsi: « Deux figures seront dites en corrélation élémentaire lorsqu'à tout élément infiniment petit de l'une correspond un élément infiniment petit de l'autre, de telle manière qu'à deux éléments qui se touchent dans la première correspondent deux éléments qui se touchent dans la seconde; ou aussi: deux figures sont en corrélation élémentaire lorsqu'à tout point de l'une correspond un point de l'autre, de telle manière qu'à deux points infiniment voisins correspondent toujours deux points infiniment voisins. Dès lors, une ligne ne peut être en corrélation élémentaire qu'avec une autre ligne, une surface avec une surface et un corps spatial avec un corps spatial. » L'idée centrale de toute cette théorie est ainsi définie d'une façon claire, au moyen de termes auxquels on peut donner une signification mathématique précise. Cette définition a sur celles ayant cours à l'époque un avantage décisif: elle n'exige plus l'existence d'une déformation physique transformant une figure en une autre, mais simplement la possibilité d'établir une correspondance entre les éléments qui les constituent. On est maintenant en mesure de l'appliquer à des ensembles abstraits, sur lesquels l'intuition

n'a plus prise, et que l'on ne peut par conséquent pas déformer les uns dans les autres. Le but de ce premier mémoire est, comme Möbius l'indique, d'établir une classification des surfaces orientables du point de vue de la corrélation élémentaire, Il y parvient en attribuant à chaque surface un être mathématique, son schéma, qu'il simplifie ou manipule par des procédés qui ressemblent fort à ceux de l'algèbre ordinaire. A une échelle modeste, bien sûr, Möbius fait de la topologie algébrique. C'est également dans ce mémoire qu'il introduit, comme représentant de chaque classe de surfaces, des figures aujourd'hui classiques<sup>1</sup>. Il démontre finalement le théorème fondamental: deux surfaces sont homéomorphes si et seulement si elles appartiennent à la même classe.

Le mémoire de 1865 s'intitule *Über die Bestimmung des Inhaltes eines Polyeders*. Ce travail présente et analyse le concept de surface à un côté. En fait, pour Möbius, le but de cette étude, comme son titre l'indique, est d'examiner la notion de volume d'un polyèdre, l'idée de surface à un côté n'étant qu'un auxiliaire. D'abord, Möbius innove en considérant la longueur d'un segment, l'aire d'une surface, le volume d'un polyèdre comme des nombres munis d'un signe, ce qu'il avait déjà fait dans son *Calcul barycentrique*. Puis il définit l'aire d'un polygone ordinaire, c'est-à-dire d'un polygone dont le périmètre ne se recoupe pas lui-même; il décompose pour cela la figure en triangles à partir d'un point quelconque; grâce aux considérations sur le signe, lorsqu'un même triangle apparaît  $p$  fois avec le signe  $+$  et  $q$  fois avec le signe  $-$ , il l'écrit  $p - q$  fois dans la somme finale. Dans le cas des polyèdres, il fait de même; pour démontrer que la somme des volumes des pyramides obtenues par décomposition à partir d'un point  $P$  ne dépend pas de  $P$ , il prend un deuxième point  $P'$  et montre que la différence des volumes engendrés par les deux décompositions est nulle. Au cours de ce raisonnement se présente une somme de tétraèdres, chacun d'eux étant compté deux fois; cette somme est nulle si les volumes s'éliminent deux à deux, c'est-à-dire s'ils sont de signe contraire. En dernière analyse, cela signifie que le polyèdre puisse être orienté de manière que chaque arête soit parcourue dans des sens opposés, selon qu'on la considère comme appartenant à une face ou à l'autre. C'est la loi des arêtes. Möbius se demande alors naturellement s'il existe des polyèdres qui ne vérifient pas cette loi. Il en a découvert, les a étudiés, en a compris le caractère topologique, les a popularisés sous la forme du ruban dont il a l'honneur de porter le nom. Malheureusement, il n'a pas essayé de situer ses « surfaces unilaté-

---

<sup>1</sup> Voir opusc. cité, p. 97.

rales » dans le cadre de sa classification de 1863. On le regrettera d'autant que notre auteur avait conscience de ce problème, comme l'atteste le texte écrit à l'intention du Grand-Prix. Nous l'avons vu plus haut, Listing a publié des considérations sur le ruban de Möbius en 1861 déjà. Il a donc la priorité de droit sur cette découverte. En fait, les archives de Möbius et de Listing établissent que c'est en juillet 1858 chez le premier, en septembre de la même année chez le second que cette surface apparaît. Cette concordance dans les dates mérite réflexion. En examinant de près cette question, j'ai acquis la conviction que le père du fameux ruban est en réalité l'inévitable Gauss<sup>1</sup>. En tout état de cause, le nom par lequel on a coutume d'appeler cette surface est justifié. Pour Listing c'était uniquement une forme secondaire, faisant exception à celles qu'il étudiait, et juxtaposée mais non intégrée à son étude. Pour Möbius, au contraire, le ruban est un élément qui se présente naturellement et nécessairement. Möbius a défini l'homéomorphisme, pris en considération et résolu pour la première fois le problème de la classification des lignes et des surfaces orientables, ouvertes ou fermées, déterminé un invariant topologique: leur ordre de connexion, et ceci par voie originale, montré l'existence d'une relation entre ce nombre et la caractéristique d'Euler, abordé le problème de l'homéomorphisme entre corps de l'espace, introduit rigoureusement, et de l'intérieur, les surfaces « unilatérales ». Si Euler, Listing, Riemann et autres ont donné des béquilles à la topologie, Möbius lui a donné des ailes. Néanmoins, l'influence de son œuvre sur le développement de la topologie ne fut pas aussi importante que ce que l'on aurait été en droit d'attendre, ni la notoriété de Möbius ce qu'elle aurait dû être. Il est quasi certain que si l'Académie lui avait décerné le prix, amplement mérité par l'extraordinaire originalité du mémoire, ses résultats auraient eu une diffusion large et rapide; tandis que les quelques pages, d'une lecture relativement difficile, traitant d'un sujet ne paraissant se rattacher à rien, et qui plus est, parues dans un périodique d'ordre secondaire, n'eurent guère d'audience.

#### § 8. JORDAN

Le premier des deux importants problèmes topologiques que Camille Jordan aborde au cours de l'année 1866 s'inspire d'une question traitée par Gauss en 1827: « Un des problèmes les plus connus de la géométrie est le suivant: Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour

<sup>1</sup> Voir opusc. cité, p. 109-110.