2. Nous utiliserons les lemmes suivants:

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1974)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

FORMES-VOLUME SUR LES VARIÉTÉS A BORD

par Augustin BANYAGA

1. Introduction

Soit M une variété différentiable. Une famille à 1-paramètre de formes-volume τ_t est la donnée pour tout $t \in [0, 1]$, d'une forme différentielle de degré maximum, partout non nulle, C^∞, et variant différentiablement avec t.

Moser [1] a démontré qui si τ_t est une famille à 1-paramètre de formes-volume sur une variété différentiable M connexe et compacte sans bord, la condition $\int_M \tau_t = \int_M \tau_0$, pour tout t, entraînait l'existence d'une isotopie Φ_t de M telle que $\Phi_t^* \tau_t = \tau_0$.

Nous donnons ici une généralisation de ce théorème aux variétés compactes, connexes, à bord, par une méthode qui évite l'emploi des formes harmoniques. Notre résultat s'énoncera ainsi:

THÉORÈME. Soit M une variété différentiable orientable, à bord ∂M, compacte et connexe de dimension n, τ_t une famille à 1-paramètre de formes-volume. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) $\int_M \tau_t = \int_M \tau_0$, pour tout t

(ii) Il existe une famille à 1-paramètre de $(n-1)$-formes α_t telles que $\partial \tau_t / \partial t = d\alpha_t$ et $\alpha_t(x) = 0$ pour tout $x \in \partial M$.

(iii) Il existe une isotopie Φ_t de M telle que

$$\Phi_t^* \tau_t = \tau_o, \Phi_o = \mathrm{id} \text{ et } \Phi_t \mid \partial M = \mathrm{id}.$$

2. Nous utiliserons les lemmes suivants:

Lemme 1. Il existe un atlas $(U_i, \varphi_i)_{i=o,\ldots,m}$, $m < \infty$, de M où tous les U_i sont des ouverts non vides de M tels que $U_0 \subset \bigcap_{i=1}^{m} U_i$ et $U_0 \cap \partial M = \phi$, les φ_i étant des difféomorphismes préservant l'orientation de U_i sur $\mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{R}^n_+ = \{x = (x_1 \ldots x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_1 \geqslant 0\}$.

Démonstration. Le lemme est trivial pour $n = 1$. Supposons $n > 1$. Soit $x_0 \in M \setminus \partial M$ et $y \in M$. Soit ψ une carte locale en y, c'est-à-dire un difféomorphisme d'un voisinage V_y de y sur $\mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{R}^n_+$. Soit x_1 un point de V_y différent de y et pris hors du bord. On choisit un chemin différentiable $c(t)$, évitant y et le bord et reliant x_0 à x_1 c'est-à-dire tel que $c(0) = x_0$ et $c(1) = x_1$. Ceci est possible en dimension > 1 par connexité.

D'après le théorème d'extension des isotopies (voir Palais [4]), il existe une isotopie H_t de M telle que

$$H_t(y) = y, H_t(x_1) = c(t), \text{ pour tout } t.$$

Posons $U_y = H_0(V_y)$; c'est un ouvert contenant x_0 et y. Soit φ_y la carte de source U_y définie par $\varphi_y = \psi_0 H_0^{-1}$. Comme M est compact on peut extraire du recouvrement $\{U_y\}_{y \in M}$ un recouvrement fini $U_1, \ldots, U_m$; soient $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ les cartes correspondantes. Comme $x_0 \in U_1$ pour tout i, $\bigcap_{i=1}^{m} U_i = U_0 \neq \phi$. On diminue éventuellement U_0 pour que $U_0 \cap \partial M = \phi$ et qu'il existe une carte φ_0 de U_0 sur $\mathbf{R}^n$.

Désignons par $\bigwedge_c^p(\mathbf{R}^n)$, (respectivement $\bigwedge_c^p(\mathbf{R}^n_+)$) l'espace des p-formes de classe C^∞, à support compact dans $\mathbf{R}^n$ (respectivement dans $\mathbf{R}^n_+$)) . On le munit de la topologie suivante: on dira qu'une suite de formes $\{\varphi_\nu\}_{\nu \in \mathbf{N}}$, de coefficients $\varphi_\nu^{i_1 \ldots i_p}$, tend vers 0 dans $\bigwedge_c^p(\mathbf{R}^n)$ (ou $\bigwedge_c^p(\mathbf{R}^n_+)$) si et seulement si leurs supports restent dans un compact fixe K et pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ lessuites $D^\alpha \varphi_\nu^{i_1 \ldots i_p}$ tendent uniformément vers 0 quand $\nu \to \infty$.

Le bord $\partial \mathbf{R}^n_+$ de $\mathbf{R}^n_+$ est le sous-espace $\{ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_1 = 0\}$, et l'intérieur de $\mathbf{R}^n_+$ est $\mathbf{R}^n_+ \setminus \partial \mathbf{R}^n_+$.

Lemme 2. Pour toute forme $\omega \in \bigwedge_c^n(\mathbf{R}^n_+)$, à support dans l'intérieur de $\mathbf{R}^n_+$ et telle que $\int \omega = 1$, il existe un opérateur

$$I_n^\omega : \textstyle\bigwedge_c^n(\mathbf{R}^n) \to \bigwedge_c^{n-1}(\mathbf{R}^n) \left(\text{resp. } I_n^\omega : \bigwedge_c^n(\mathbf{R}^n_+) \to \bigwedge_c^{n-1}(\mathbf{R}^n_+)\right)$$

linéaire et continu au sens de la topologie mentionnée plus haut et tel que l'on ait

1) $d I_n^\omega(\alpha) = \alpha - \omega \int \alpha, \ \forall \alpha \in \bigwedge_c^n(\mathbf{R}^n)$,

2) $(I_n^\omega(\alpha))(x) = 0, \forall x \in \partial \mathbf{R}^n_+$.

Remarques

1) Dans la suite I_n^ω sera désigné par I_n seulement.

2) Ce lemme est une modification d'un lemme de de Rham [3].

Démonstration.

1. Cas de $\bigwedge_c^n(\mathbf{R}^n)$. On construit I_n par récurrence en convenant que $I_0 = 0$ et en choisissant une forme particulière

$$\bar{\omega} = a(x_1)\,a(x_2)\ldots a(x_n)\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

où $a(t)$ est une fonction quelconque, de classe C^∞, positive ou nulle, à support dans l'intervalle [1, 2] et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} a(t)dt = 1$. Il est clair que $\int \bar{\omega} = 1$.

Désignons par d' l'application de $\bigwedge^r(\mathbf{R}^n)$ dans $\bigwedge^{r+1}(\mathbf{R}^n)$ définie par $d' = \sum_{i=1}^{n-1} d\,x_i \wedge \partial/\partial\,x_i$. On a $d = d' + d\,x_n \wedge \partial/\partial\,x_n$,

$$\bar{\omega} = \omega' \wedge a(x_n)\,d\,x_n\,,$$

avec
$$\omega' = a(x_1)\ldots a(x_{n-1})\,d\,x_1 \wedge \ldots \wedge d\,x_{n-1}$$

et toute forme $\alpha \in \bigwedge^n(\mathbf{R}^n)$ s'écrira $\alpha = \alpha_1(x_n) \wedge d\,x_n$ où $\alpha_1(x_n)$ est une $(n-1)$-forme dans $\mathbf{R}^{n-1}$ (x_n étant pris comme paramètre). Suivant [3], on pose

$$\bar{I}_n(\alpha) = \bar{I}_{n-1}(\alpha_1) \wedge d\,x_n + (-1)^{n-1}\,\omega'\,\{\int_{-\infty}^{x_n} \left(\int a_1(t) - a(t)\int\alpha\right) d\,t\}\,.$$

C'est bien un opérateur linéaire et continu. La propriété annoncée se vérifie par un calcul direct.

$$d\,\bar{I}_n\,\alpha = d\left(\bar{I}_{n-1}(\alpha_1) \wedge dx_n\right) + (-1)^{n-1}\,d\left(\omega'\,\{\int\ldots\}\right),$$

$$\begin{aligned} d\left(\bar{I}_n - 1(\alpha_1) \wedge dx_n\right) &= \left(d' + dx_n \wedge \frac{\partial}{\partial x_n}\right)\left(\bar{I}_{n-1}(\alpha_1) \wedge dx_n\right) \\ &= d'\left(I_{n-1}(\alpha_1)\right) \wedge d\,x_n \\ &= \left(\alpha_1 - \omega' \textstyle\int \alpha_1\right) \wedge d\,x_n, \text{ par hypothèse de récurrence,} \\ &= \alpha - \left(\omega' \wedge dx_n\right)\textstyle\int \alpha_1\,. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\left(d' + dx_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)\left(\omega'\{\ldots\}\right) = d\,x_n \wedge \omega' \frac{\partial}{\partial x_n}\{\int \ldots\}$$
$$= \left((-1)^{n-1}\omega' \wedge dx_n\right)\left(\int \alpha_1(x_n) - a(x_n)\int\alpha\right)$$
$$= (-1)^{n-1}\,\omega' \wedge d\,x_n\left(\int \alpha_1(x_n)\right) - (-1)^{n-1}\,\omega' \wedge a(x_n)\,d\,x_n\left(\int\alpha\right),$$

de sorte que $d\,\bar{I}_n(\alpha) = \alpha - \bar{\omega}\int\alpha$.

Soit maintenant une autre n-forme ω à support compact dans $\mathbf{R}_+^n$ et telle que $\int\omega = 1$; on définit $I_n(\alpha) = \bar{I}_n(\alpha) - \bar{I}_n(\omega)\int\alpha$ et on a $d\,I_n(\alpha) = \alpha - \omega\int\alpha$.

2. Cas de $\bigwedge_c^n(\mathbf{R}_+^n)$. On définit I_0 en convenant que $I_0 = 0$. Définissons $\bar{I}_1$. Soit $\alpha = g(x)\,dx$ où g est à support dans $\mathbf{R}_+^n$ et soit $b(x)$ une fonction C^∞, positive ou nulle, à support dans l'intervalle $[1, 2]$ et telle que $\int_0^\infty b(t)\,dt = 1$.

On pose $\bar{\omega} = b(x)\,dx$ et

$$\bar{I}_1(\alpha) = \int_0^x \left(g(t) - b(t)\int \alpha\right) dt\,.$$

On a bien

$$d\bar{I}_1(\alpha) = \alpha - \bar{\omega}\int\alpha\,.$$

Pour $n > 1$, on définit $\bar{I}_n$ par récurrence en posant

$$\bar{I}_n(\alpha) = \bar{I}_{n-1}(\alpha_1) \wedge dx_n + (-1)^{n-1}\,\omega'\Big\{\int_{-\infty}^{x_n}\Big(\int_{\mathbf{R}^{n-1}} \alpha_1(t) - b(t)\int_{\mathbf{R}_+^n}\alpha\Big)\,dt\Big\}$$

où $\omega' = b(x_1)\,b(x_2)\ldots b(x_{n-1})\,dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{n-1}$.

Cet opérateur transforme les formes à support compact, en formes à support compact. On vérifie que $d\bar{I}_n\alpha = \alpha - \bar{\omega}\int\alpha$ et comme avant on remarque que l'on peut prendre ω quelconque à support dans l'intérieur $\mathbf{R}_+^n$ telle que $\int\omega = 1$, et construire $I_n(\alpha) = \bar{I}_n(\alpha) - \bar{I}_n(\omega)\int\alpha$.

Montrons que si $\alpha \in \bigwedge_c^n(\mathbf{R}_+^n)$ alors $I_n(\alpha)(x) = 0$ pour tout $x \in \partial\mathbf{R}_+^n$. Ceci est vrai pour $n = 0, 1$. Supposons le vrai pour $(n-1)$. La formule définissant I_n montre que

$I_n(\alpha)(x) = I_{n-1}(\alpha_1)(x) \wedge dx^n$ pour tout $x \in \partial\mathbf{R}_+^n$, mais $I_{n-1}(\alpha_1)(x) = 0$ par hypothèse de récurrence.

3. Démonstration du théorème

(ii) implique (iii). Suivant Moser [1], on définit une famille à 1-paramètre de champs de vecteurs u_t en posant

$$(*)\quad i(u_t)\tau_t + \alpha_t = 0,$$

$i(u_t)\,\tau_t$ étant le produit intérieur de τ_t et u_t; c'est la $(n-1)$-forme définie par

$(i(u_t)\,\tau_t)(\xi_1 \ldots \xi_{n-1}) = \tau_t(u_t, \xi_1 \ldots \xi_{n-1})$ pour $n - 1$ champs de vecteurs $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$.

Comme $\alpha_t \,|\, \partial M = 0$ et $\tau_t \neq 0$, on a $u_t \,|\, \partial M = 0$ et l'équation $\frac{d}{dt}(\Phi_t) = u_t \cdot \Phi_t$ admet une solution Φ_t telle que $\Phi_0 = \mathrm{id}$; $\Phi_t \,|\, \partial M = \mathrm{id}$.