§7. — Le cas C^∞ : énoncé du théorème principal

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1974)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

formelles qui précèdent, se ramener au cas où l'on a $M = M_0 + M_\infty$, M_0 constante et M_∞ plate.

Enfin, il suffit de trouver F à droite de 0 et tendant vers 0 ainsi que toutes ses dérivées en 0 (nous dirons qu'une telle F est « plate à droite en 0 »); on fera ensuite la même opération à gauche, en changeant x en $-x$.

Posons alors $F = \exp(M_0 \log x) F_1$, $G = \exp(M_0 \log x) G_1$; il est clair par l'expression explicite de $\exp(M_0 \log x)$ pour M_0 triangulaire, que F et F_1 seront simultanément plates à droite en 0, et de même pour G et G_1. On est ramené à l'équation

$$x \frac{dF_1}{dx} - N_\infty F_1 = G_1, \text{ avec } N_\infty = \exp(-M_0 \log x)\, M_\infty \exp(M_0 \log x),$$

donc N_∞ est plate à droite en 0; en divisant par x, on est ramené au théorème d'existence et d'unicité usuel. D'où la proposition.

Corollaire 6.4. Soit $D = x \dfrac{d}{dx} - M$, *avec* $M \in \operatorname{End}(K\mathscr{E}^m)$, *et supposons que* 0 *soit un point singulier régulier. Il existe alors* $A \in \mathrm{Gl}(m, K\mathscr{E})$ *tel que la transformation* $F = AF'$ *transforme* D *en* $D' = x \dfrac{d}{dx} - N$, *avec* N *constant.*

Comme ci-dessus, on peut supposer $M = M_0 + M_\infty$, avec M_0 constant, M_∞ plat. Considérons alors l'équation

$$x \frac{dA}{dx} = MA - AM_0, \text{ avec } A \text{ à coefficients dans } \mathscr{E},\ A(0) = I.$$

Cette équation admet pour solution formelle I; d'après 6.3, elle admet donc une solution A, avec $\hat{A} = I$; d'où le résultat.

On déduit immédiatement de ce corollaire, l'expression générale d'une matrice fondamentale d'un système à points singuliers réguliers, et à coefficients $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0.

§ 7. — Le cas $\mathscr{C}^\infty$: énoncé du théorème principal

Soit k un entier; soit d'autre part Φ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ des $m + 1$ variables x et $Y = (y_1, \ldots, y_m)$, définie au voisinage de $(0, Y^0)$, et à valeurs dans $\mathbf{R}^m$; notons $\hat{\Phi}$ son développement de Taylor en $(0, Y^0)$.

Théorème 7.1. Supposons qu'il existe $H \in \hat{\mathcal{O}}^m$, *à coefficients réels, avec* $H(0) = Y^0$, *qui vérifie l'équation* $x^{k+1} \frac{dH}{dx} = \hat{\Phi}(x, H)$. *Alors il existe* $F \in \mathcal{E}^m$, *à valeurs réelles vérifiant* $\hat{F} = H$, $x^{k+1} \frac{dF}{dx} = \Phi(x, F)$.

Nous allons d'abord indiquer comme ce théorème peut être déduit d'un lemme sur les équations linéaires, lemme qui sera démontré dans les paragraphes suivants. Soient $a > 0$, et p entier $\geqslant 0$; nous désignerons par $B(p; a)$ l'espace des fonctions f continues sur $[0, a]$ à valeurs complexes, et telles que $x^{-p} f(x)$ soit bornée sur cet intervalle; on posera $|f|_p = \sup\limits_{x \in]0, a]} |x^{-p} f(x)|$. Pour $f \in B(p; a)^m$, $F = (f_1, \ldots, f_m)$ on posera par exemple $|F|_p = \sup |f_i|_p$.

Lemme fondamental 7.2. Soit $D = x^{k+1} \frac{d}{dx} - M$, *avec* $M \in \mathrm{End}(\mathcal{E}^m)$ *et* $k \in \mathbf{Z}$; *on peut trouver* $l \in \mathbf{Z}$, $p_0 \in N$, et $a_0 > 0$, *possédant les propriétés suivantes: Pour* $0 < a \leqslant a_0$, *il existe une application linéaire* $K : B(p_0, a)^m \to B(p_0 - l, a)^m$ *inverse à droite de* D *(i.e.* $DKG = G$*), et telle que, pour tout* $p \geqslant p_0$, *la restriction de* K *à* $B(p, a)^m$ *soit une application linéaire continue* $B(p, a)^m \to B(p - l, a)^m$.

Remarquons que l'on peut aussi supposer la norme de $K : B(p; a)^m \to B(p - l; a)^m$ majorée par une quantité indépendante de a (mais non de p), pourvu qu'on ait supposé $p_0 - l \geqslant 0$, ce qu'on fera par la suite; en effet, supposons K obtenu pour $a = a_0$, et notons le K_{a_0}; pour obtenir un K_a, on peut opérer ainsi: soit $\tilde{G}$ le prolongement à $]0, a_0]$ d'une fonction G continue sur $]0, a]$ obtenu en posant $\tilde{G}(x) = G(a)$, $a \leqslant x \leqslant a_0$; on a évidemment $|\tilde{G}|_p = |G|_p$, et l'on posera simplement $K_a G =$ (restriction à $]0, a]$ de $K_{a_0} \tilde{G}$).

Montrons comment ce théorème 7.1 résulte du lemme précédent (appliqué aux fonctions à valeurs réelles). Comme au § 6, on se ramène d'aboid au cas où $Y^0 = 0$, $H = 0$; on a alors $\hat{\Phi}(x, 0) = 0$, et on cherche F plat; il suffit de trouver F à droite de 0 (on le trouvera ensuite à gauche de la même manière, en changeant x en $-x$); écrivons alors $\Phi(x, Y) = \Phi(x, 0) + M(x) Y + \Psi(x, Y)(Y, Y)$ avec $M \in \mathrm{End}(\mathcal{E}^m)$, Ψ une forme quadratique à coefficients $\mathcal{C}^\infty(x, Y)$; on applique le lemme précédent, et l'on cherche $F \in B(p, a)^m$ (p et a à déterminer), solution de l'équation $F = K[\Phi(x, 0) + \Psi(x, F)(F, F)]$.

Notons $L(F)$ le second membre de l'équation précédente, et choisissons $p \geqslant p_0$, et vérifiant $p - l \geqslant 1$. Supposons $a \leqslant 1$; on a alors, puisque $\Phi(x, 0)$ est plat $|\Phi(x, 0)|_{p+1} \leqslant C(a)$, avec $C(a) \to 0$ si $a \to 0$; d'autre part, si $|F|_p \leqslant 1$, on a $|F|_0 \leqslant 1$ donc $\Psi(X, F)$ est borné, et par suite on a, avec C indépendant de a:

$$|(\Psi(x, F)(F, F)|_{2p} \leqslant C|F|_p^2, \text{ donc } |\Psi(x, F)(F, F)|_{p+l} \leqslant Ca|F|_p^2$$

il résulte de là, et de la remarque qui suit l'énoncé du lemme que, pour a assez petit, L envoie la boule unité Σ de $B^m(p, a)$ dans elle-même.

Un calcul analogue montre que pour $|F|_p \leqslant 1$, $|G|_p \leqslant 1$, on a

$$|\Psi(x, F)(F, F) - \Psi(x, G)(G, G)|_{2p} \leqslant C|F - G|_p$$

d'où

$$|\Psi(x, F)(F, F) - \Psi(x, G)(G, G)|_{p+l} \leqslant Ca|F - G|_p$$

on en déduit que, pour a assez petit, L est contractante sur Σ; alors l'équation $F = L(F)$ a une solution et une seule dans Σ; comme F vérifie $x^{k+1} \dfrac{dF}{dx} = \Phi(x, F)$ dans $]0, a]$, F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, a]$. Reste à montrer que F est plate en 0.

Tout d'abord, montrons que $x^{-q}F$ est borné sur $]0, a]$, quel que soit $q \geqslant p$; ceci est vrai pour p, donc par récurrence, il suffit de le montrer pour $q + 1$, en supposant le résultat établi pour q; or, on a alors $F \in B(q; a)^m$, donc $\Psi(x, F)(F, F) \in B(2q; a)^m$; a fortiori $\Psi(x, F) \in B(q + l + 1, a)^m$ et, par hypothèse x, $\Phi(x, 0) \in B(q + l + 1, a)^m$; donc $L(F) \in B(q + 1, a)^m$, ce qui démontre le résultat; en utilisant l'équation différentielle $x^{k+1} \dfrac{dF}{dx} = \Phi(x, 0) + M(x)F + \Psi(x, F)(F, F)$, et le résultat précédent, on voit que $x^{-q} \dfrac{dF}{dx}$ est encore borné pour tout q; en dérivant l'équation, on voit que $x^{-q} \dfrac{d^2F}{dx^2}$ est encore borné pour tout q, et ainsi de suite. Par conséquent modulo le lemme 7.2, le théorème 7.1 est complètement démontré.

Proposition 7.3. Si D a un point singulier régulier en 0, *le lemme 7.2. est vrai.*

Il est clair que, si le lemme garde un sens lorsqu'on suppose $M \in \mathrm{End}(K\mathscr{E}^m)$, et que d'autre part, on ne change rien (sauf les valeurs éventuelles de p_0 et 1) en multipliant D par x^p ($p \in \mathbf{Z}$) et en faisant une transformation du type $F = A F_1$, $G = A G_1$, avec $A \in \mathrm{Gl}(m, K\mathscr{E})$. D'après le corollaire (6.4), on peut donc supposer $k = 1$, et M constant; on peut même supposer que M est triangulaire inférieure; alors en raisonnant par récurrence, on est ramené à démontrer le résultat lorsque D est l'opérateur différentiel scalaire $x \dfrac{d}{dx} - \lambda$, $\lambda \in \mathbf{C}$; ce cas peut être laissé au lecteur, (ici, on pourra même prendre $l = 0$, mais peu importe).

§ 8. — Le cas favorable

La proposition suivante est classique:

Proposition 8.1. Avec les notations du lemme 7.2, supposons $k \geqslant 1$, et supposons que les valeurs propres λ_j de $M(0)$ vérifient $Re(\lambda_j) \neq 0$. Alors le lemme 7.2 est vrai avec $l = 0$.

Démonstration

i) Il suffit de démontrer la proposition pour $M = M(0)$; en effet, supposons le résultat établi dans ce cas; soit $K^0 : B(p; a)^m \to B(p; a)^m$ l'inverse à droite de $x^{k+1} \dfrac{d}{dx} - M(0)$ (K^0 dépend de a, mais non de $p \geqslant p_0$); on pose alors $M(x) = M(0) + x N(x)$, $N \in \mathrm{End}(\mathscr{E}^m)$, et on note L l'application $F \mapsto x N K^0 F$; il suffit de trouver K^1, inverse de $I - L$, car alors $K^0 K^1 = K$ sera un inverse à droite de D.

Or, pour $a \leqslant a_0$, on a $|K_0 F|_{p_0} \leqslant C |F|_{p_0}$ (cf. remarque suivant l'énoncé du lemme 7.2), d'où, par un calcul analogue à ceux du § 7: $|LF|_{p_0} \leqslant C' a |F|_{p_0}$; en choisissant a pour qu'on ait $C' a < 1$, on voit que la série $K^1 = \Sigma L^n$ converge dans l'espace des applications linéaires continues de $B(p_0; a)^m$ dans lui-même.

Montrons par récurrence sur $p \geqslant p_0$ que K^1 envoie continuement $B(p; a)^m$ dans lui-même; supposons donc le résultat acquis pour $p - 1$; l'équation $H = K^1 G$ équivaut à $H = G + LH$; si G parcourt un borné de $B(p, a)^m$, H parcourt un borné de $B(p-1; a)^m$ par hypothèse de récurrence; donc $LH = x N K^0 H$ parcourt un borné de $B(p; a)^m$; donc $H = C + LH$ parcourt un borné de $B(p; a)^m$, ce qui démontre le résultat.

Il est alors clair que $K = K^0 K^1$ répond à la question; d'où la proposition.