ÜBER DIE POTENZGESETZE

Autor(en): **Streb, Walter**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1974)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-46905

ÜBER DIE POTENZGESETZE

von Walter STREB

Im folgenden verstehen wir unter einem Ring R eine Struktur mit 2 Verknüpfungen, einer Addition und einer Multiplikation, die folgende Eigenschaften besitzt: R ist bezüglich der Addition eine kommutative Gruppe und bezüglich der Multiplikation ein nicht notwendig assoziatives oder kommutatives Verknüpfungsgebilde. Die Multiplikation ist beidseitig distributiv über der Addition.

In jedem assoziativen und kommutativen Ring R gilt bekanntlich für jedes $n \in \mathbf{N}$ das Potenzgesetz

$$P_n: \quad r^n s^n = (rs)^n \text{ für alle } r, s \in R.$$

Hierbei sei $\mathbf{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen und werde wie üblich rekursiv $t^1 := t$, $t^{i+1} := (t^i)\, t$ für $t \in R$ und $i \in \mathbf{N}$ definiert.

Wir zeigen:

Satz. Besitzt ein Ring R ein Einselement 1 und die Charakteristik 0, d.h.

(1) $$\text{für } n \in \mathbf{N} \text{ und } r \in R \text{ folgt aus } n\,r = 0 \text{ stets } r = 0,$$

und gilt in R für ein $n \in \mathbf{N}$ mit $n \geqslant 2$ das Potenzgesetz P_n, so ist R kommutativ und assoziativ.

Beweis. Mit P_n gilt auch

(2) $$(r+1)^n (s+1)^n = ((r+1)(s+1))^n \text{ für alle } r, s \in R.$$

Distributive Berechnung von (2) erbringt

$$1 + \sum_{\substack{i+j \geq 1 \\ 0 \leq i,j \leq n}} S_{i,j}(r, s) = 1 + \sum_{\substack{i+j \geq 1 \\ 0 \leq i,j \leq n}} T_{i,j}(r, s), \text{ also}$$

(3) $$\sum_{\substack{i+j \geq 1 \\ 0 \leq i,j \leq n}} \left(S_{i,j}(r, s) - T_{i,j}(r, s)\right) = 0 \text{ für alle } r, s \in R.$$

Hierbei sind $S_{i,j}(r,s)$ und $T_{i,j}(r,s)$ wohlbestimmte Summen von Produkten, in denen r genau i-mal und s genau j-mal erscheint, wobei wegen der nicht vorausgesetzten Assoziativität die Klammersetzung konsequent zu berücksichtigen ist. Für alle $k, l \in N$ erhält man aus (3) durch die formalen Substitutionen $r \to k\,r$ und $s \to l\,s$ und anschließende distributive Berechnung

(4) $$\sum_{\substack{i+j \geq 1 \\ 0 \leq i,j \leq n}} k^i l^j \left(S_{i,j}(r, s) - T_{i,j}(r, s)\right) =$$

$$= \sum_{\substack{i+j \geq 1 \\ 0 \leq i,j \leq n}} \left(S_{i,j}(kr, ls) - T_{i,j}(kr, ls)\right) = 0\,,$$

also bei geeigneter Linearkombination der Gleichungen (4) und Beachtung von (1)

(5) $$S_{i,j}(r, s) - T_{i,j}(r, s) = 0 \text{ für alle } i \text{ und } j,\ 0 \leqslant i, j \leqslant n, \text{ und } r, s \in R\,.$$

Speziell gilt

(6) $$0 = S_{1,1}(r, s) - T_{1,1}(r, s) = m_1 rs - (m_2 rs + m_3 sr) \text{ für alle } r, s \in R$$ mit gewissen $m_i \in \mathbf{N}$, $1 \leqslant i \leqslant 3$.

Für $r = s = 1$ folgt aus (6) $m_1 - m_2 = m_3$, also $m_3\,(rs\text{-}sr) = 0$, schließlich mit (1)

(7) $$rs = sr \text{ für alle } r, s \in R\,.$$

Mit (7) ergibt sich

(8) $$(rr)\,s = s\,(rr),\ r\,(rs) = r\,(sr) = (rs)\,r = (sr)\,r \text{ für alle } r, s \in R\,.$$

Speziell gilt weiterhin bei Beachtung von (8)

(9) $$0 = S_{2,1}(r, s) - T_{2,1}(r, s) = n_1\,(rr)\,s - \left(n_2\,(rr)\,s + n_3 r\,(rs)\right) \text{ für alle}$$ $r, s \in R$ mit gewissen $n_i \in \mathbf{N}$, $1 \leqslant i \leqslant 3$.

Für $r = s = 1$ folgt aus (9) $n_1 - n_2 = n_3$, also $n_3\left((rr)\,s - r\,(rs)\right) = 0$, schließlich mit (1)

(10) $$(rr)\,s - r\,(rs) = 0 \text{ für alle } r, s \in R\,.$$

Durch die formalen Substitutionen $r \to u + v$ und $s \to w$ erhält man aus (10) die Gleichung

$$0 = \left((u+v)(u+v)\right) w - (u+v)\left((u+v)\,w\right) = (uu)\,w -$$
$$- u\,(uw) + (vv)\,w - v\,(vw) + (uv)\,w + (vu)\,w - u\,(vw) - v\,(uw) =$$
$$2\,(uv)\,w - u\,(vw) - v\,(uw), \text{ also}$$

(11) $$2\,(uv)\,w - v\,(uw) - u\,(vw) = 0 \text{ für alle } u, v, w \in R\,.$$

Setzt man $u := w$ und $w := u$, so gilt mit (11) auch $0 = 2(wv)u - v(wu) - w(vu) = 2u(vw) - v(uw) - (uv)w$, folglich

$$(uv)w + v(uw) - 2u(vw) = 0 \text{ für alle } u, v, w \in R. \tag{12}$$

Addition der Gleichungen (11) und (12) erbringt $3((uv)w - u(vw)) = 0$, also mit (1) $(uv)w = u(vw)$ für alle $u, v, w \in R$.

Bemerkung. In jedem assoziativen Ring R gelten bekanntlich für alle $m, n \in \mathbf{N}$ die Potenzgesetze

$$r^m r^n = r^{m+n}, \quad (r^m)^n = r^{mn} \text{ für alle } r \in R. \tag{a}$$

Eine dem Satz entsprechende Umkehrung dieser Aussage gilt jedoch nicht wie folgendes

Beispiel zeigt. Mit den Basiselementen $1, a, b$ bilden wir einen Vektorraum über dem Ring $\mathbf{Z}$ der ganzen Zahlen. Durch die Multiplikationsregeln $1 \cdot 1 = 1$, $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$, $1 \cdot b = b \cdot 1 = b$, $a^2 = b^2 = 0$ und $ab = ba = 1$ erhält man eine kommutative, nichtassoziative Algebra über $\mathbf{Z}$, in der alle Potenzgesetze (a) gelten.

(Reçu le 25 avril 1974)

Walter Streb

Henri-Dunant-Str.: 65
Fachbereich 6 der Universität
D-43 Essen 16

vide-leer-empty