

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 21 (1975)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: NOMBRE DE CLASSES D'UN ORDRE D'EICHLER ET VALEUR AU POINT -1 DE LA FONCTION ZÊTA D'UN CORPS QUADRATIQUE RÉEL
Autor: Vigneras, Marie-France
Anhang: Appendice: Calcul des nombres de classes des ordres d'Eichler sur le corps des nombres rationnels
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-47331>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 18.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

$$H_3(D_1, D_2) = \frac{\Phi_3(D_1, D_2)}{12} + \frac{11 E_{D_1, D_2}^{(2)}(1) + 15 E_{D_1, D_2}^{(2)}(2) + 8 E_{D_1, D_2}^{(2)}(3)}{24} + \frac{E_{D_1, D_2}^{(\varepsilon)}(1)}{2}$$

$$H_5(D_1, D_2) = \frac{\Phi_5(D_1, D_2)}{30} + \frac{E_{D_1, D_2}^{(2)}(1)}{4} + \frac{E_{D_1, D_2}^{(3)}(1)}{3} + \frac{2 E_{D_1, D_2}^{(5)}(1)}{5}.$$

APPENDICE:

CALCUL DES NOMBRES DE CLASSES DES ORDRES D'EICHLER SUR LE CORPS DES NOMBRES RATIONNELS

Nous avons calculé sur ordinateur les nombres H_{D_1, D_2} , T_{D_1, D_2} , H_{D_1, D_2}^+ pour les ordres d'Eichler d'invariant (D_1, D_2) sur le corps des nombres rationnels. Nous avons utilisé les résultats théoriques du chapitre 1.

D_1 désigne un produit d'un nombre impair de nombres premiers sans facteur carré,

D_2 désigne un produit de nombres premier sans facteur carré tel que $(D_1, D_2) = 1$.

s est le nombre de diviseurs premiers de $D_1 D_2$.

$h(-m)$ est le nombre de classes du corps quadratique imaginaire $\mathbf{Q}(\sqrt{-m})$, $d(-m)$ est son discriminant:

$$d(-m) = \begin{cases} -m & \text{si } m \equiv -1(4) \\ -4m & \text{si } m \not\equiv -1(4). \end{cases}$$

$E_{D_1, D_2}^{(m)} = \prod_{p|D_1} \left(1 - \left(\frac{d(-m)}{p}\right)\right) \prod_{p|D_2} \left(1 + \left(\frac{d(-m)}{p}\right)\right)$ est le symbole $E_{D_1, D_2}(O)$ correspondant à l'ordre maximal O de $\mathbf{Q}(\sqrt{-m})$.

$F_{D_1, D_2}^{(m)} = 2 \prod_{p|D_1} \left(1 - \left(\frac{d(-m)}{p}\right)\right) \prod_{\substack{p|D_2 \\ p \neq 2}} \left(1 + \left(\frac{d(-m)}{p}\right)\right)$ est le symbole

correspondant à l'ordre de conducteur 2 de $\mathbf{Q}(\sqrt{-m})$ si D_2 est pair et $m \equiv 3(8)$.

On pose

$$\lambda(m) = \begin{cases} 1 & \text{si } m \not\equiv -1(4) \\ 2 & \text{si } m \equiv 7(8) \text{ ou si } m = 3 \\ 4 & \text{si } m \equiv 3(8) \text{ et } m \neq 3, \end{cases}$$

$$\kappa(m) = \begin{cases} \lambda(m) & \text{si } m \not\equiv 3(8) \text{ ou si } m = 3 \\ 3 & \text{si } m \equiv 3(8) \text{ et } m \neq 3. \end{cases}$$

On calcule facilement les nombres $p(m)$ pour $m \mid D_1 D_2$. On a

$$p(1) = \frac{1}{12} \left[\prod_{p \mid D_1} (p-1) \prod_{p \mid D_2} (p+1) + 3 E_{D_1, D_2}^{(1)} + 4 E_{D_1, D_2}^{(3)} \right],$$

$$2 p(m) = \begin{cases} E_{D_1, D_2}^{(m)} h(-m) & \text{si } D_1 \text{ est pair} \\ E_{D_1, D_2}^{(m)} h(-m) \lambda(m) & \text{si } D_1 D_2 \text{ est impair} \\ F_{D_1, D_2}^{(m)} h(-m) \kappa(m) & \text{si } D_2 \text{ est pair.} \end{cases}$$

Nous obtenons les nombres H_{D_1, D_2} , T_{D_1, D_2} , $H^+_{D_1, D_2}$ en utilisant les formules (12) qui s'écrivent:

$$\begin{aligned} H_{D_1, D_2} &= p(1) \\ 2^s T_{D_1, D_2} &= \sum_{m \mid D_1 D_2} p(m) \\ 2^s H^+_{D_1, D_2} &= \sum_{m \mid D_1 D_2} (p(m))^2 \end{aligned}$$

Les tables de Pizer [9] donnent H_{D_1, D_2} et T_{D_1, D_2} pour $D_1 D_2 \leq 210$. Elles contiennent quelques erreurs

D_1	D_2		
5	23	$H = 8$	au lieu de 10
7	26	$T = 5$	au lieu de 6
17	10	$T = 5$	au lieu de 6
19	10	$T = 6$	au lieu de 7
3	70	$T = 3$	au lieu de 4

Si $k = \mathbf{Q}(\sqrt{10})$, $D_1 = 1$, $D_2 = 7$ on trouve $H_{1,7} = 64$ au lieu de 61 et $T_{1,7} = 18$ au lieu de 30. Si on calcule $H^+_{1,7}$ on a $H^+_{1,7} = 1040$.

Nous possédons les nombres de classes des idéaux à gauche H_{D_1, D_2} , le nombre de type d'ordres T_{D_1, D_2} et le nombre de classes des idéaux quasi-normaux $H^+_{D_1, D_2}$ pour les invariants (D_1, D_2) , $D_1 < 47$ et $D_2 \leq 101$, $47 \leq D_1 \leq 101$ et $D_2 \leq 31$.

Mes remerciements chaleureux vont à H. COHEN qui a programmé ces opérations sur l'ordinateur du centre de calcul de Bordeaux.

Nous avons extrait des tables obtenues les ordres d'Eichler pour lesquels les nombres H_{D_1, D_2} , T_{D_1, D_2} , $H^+_{D_1, D_2}$ sont égaux à 1.

1. Ordres tels que $H_{D_1, D_2}^+ = 1$

Il y en a 10 (à isomorphisme près)

D_1	D_2	D_1	D_2
2	1	5	1
	3		2
	5	7	1
	11	13	1
3	1		
	2		

2. Ordres tels que $H_{D_1, D_2} = 1$

Ce sont les mêmes

3. Ordres tels que $T_{D_1, D_2} = 1$

Il faut rajouter les 10 invariants suivants:

D_1	D_2	D_1	D_2
2	7	7	3
	15	30	1
	23	42	1
3	5	70	1
	11	78	1

Pour tous ces ordres, nous avons $H_{D_1, D_2} = H_{D_1, D_2}^+ = 1$.

Pour les autres ordres, les relations suivantes sont toujours vérifiées:

$$1 < T_{D_1, D_2} < H_{D_1, D_2} \leq H_{D_1, D_2}^+ \leq T_{D_1, D_2} H_{D_1, D_2}.$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BROWN, K. S. Euler characteristics of discrete groups and G-spaces. *Invent. Math.* (à paraître).
- [2] DEDEKIND, K. Über die Anzahl der Ideal-Klassen in den verschiedenen Ordnungen eines endlicher Körpers. *Gesammelte mathematische werke I.*
- [3] DEURING, M. *Algebren*. Springer Verlag.
- [4] EICHLER, M. Zur Zahlentheorie der Quaternionen algebren. *J. reine angew. math.* 195 (1955), pp. 127-151.