

§ 2. Fibrés vectoriels

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

§ 2. FIBRÉS VECTORIELS

Dans tout ce paragraphe, on désigne par \mathbf{k} le corps des nombres réels ou le corps des nombres complexes. Pour tout couple (p, q) d'entiers naturels, on désigne par $M(p, q; \mathbf{k})$ l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes (à coefficients dans \mathbf{k}), par $M(p; \mathbf{k})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre p et par $G(p; \mathbf{k})$ l'ensemble des matrices carrées inversibles d'ordre p .

Rappelons que l'ensemble $G(p; \mathbf{k})$ est ouvert dans l'espace vectoriel $M(p; \mathbf{k})$ et que le passage à l'inverse est un difféomorphisme.

Soit X une variété différentielle et soit π une application de but X .

On appelle *carte réelle* (resp. *complexe*) de π toute bijection Φ de $\pi^{-1}(U)$ sur $U \times \mathbf{R}^p$ (resp. $U \times \mathbf{C}^p$), où U est un ensemble ouvert de X appelé (abusivement) le *domaine de Φ* , vérifiant la relation

$$pr_1 \cdot \Phi = \pi |_{\pi^{-1}(U)}.$$

Pour tout point x de U , on désigne par Φ_x la bijection de la fibre π_x de π au point x sur \mathbf{R}^p (resp. \mathbf{C}^p) définie par

$$\Phi_x(y) = (pr_2 \cdot \Phi)(y).$$

Soient Φ et Ψ deux cartes réelles (resp. complexes) de π de domaines respectifs U et V . On dit que Φ et Ψ sont *compatibles* si pour tout point x de $U \cap V$ la bijection $\Psi_x \cdot \Phi_x^{-1}$ est linéaire et si l'application g de $U \cap V$ dans $M(p; \mathbf{R})$ (resp. $M(p; \mathbf{C})$) définie par

$$g(x) = \Psi_x \cdot \Phi_x^{-1}$$

est indéfiniment dérivable. Cette application s'appelle la *transition de Φ dans Ψ* .

On appelle *atlas réel* (resp. *complexe*) de π tout ensemble de cartes deux à deux compatibles dont les domaines recouvrent X . On dit que deux atlas sont *compatibles* si leur réunion est un atlas. On vérifie aisément que cette relation est une relation d'équivalence. Ses classes s'appellent les *structures vectorielles réelles* (resp. *complexes*) de π .

On appelle *fibré vectoriel réel* (resp. *complexe*) sur X toute application de but X munie d'une structure vectorielle réelle (resp. complexe).

Soit π un fibré vectoriel (réel ou complexe) sur X .

On appelle (abusivement) *atlas de π* tout atlas appartenant à la structure vectorielle de π et *carte de π* toute carte appartenant à un atlas de π .

La fibre de π en un point x est naturellement munie d'une structure d'espace vectoriel qui fait de Φ_x un isomorphisme pour toute carte Φ dont le domaine contient x . La dimension de cet espace vectoriel s'appelle (malheureusement) le *rang de π au point x* et se désigne par $rg_x(\pi)$. La fonction $rg(\pi)$ est localement constante. On dit que π est de *rang pur* si elle est constante.

On appelle *fibré en droites* tout fibré vectoriel de rang pur 1.

Désignons par $\tau(\pi)$ la source de π . Pour toute carte ϕ de X et toute carte Φ de π ayant même domaine, l'application $(\phi \cdot \pi, pr_2 \cdot \Phi)$ est une carte de $\tau(\pi)$. On vérifie aisément que deux telles cartes sont compatibles et l'on munit $\tau(\pi)$ de la structure différentielle correspondante. L'application π est indéfiniment dérivable, son rang est égal à la dimension de X (on prendra garde de ne pas confondre le rang du fibré vectoriel π avec le rang de l'application π).

On appelle *section de π* toute application s de X dans $\tau(\pi)$ telle que

$$\pi \cdot s = 1_X.$$

Pour toute carte Φ de domaine U , l'application s_Φ définie sur U par

$$s_\Phi(x) = \Phi_x(s(x))$$

s'appelle l'*expression de s dans Φ* . Si Ψ est une deuxième carte de domaine V et si g désigne la transition de Φ dans Ψ , on a

$$s_\Psi(x) = g(x)(s_\Phi(x))$$

pour tout point x de $U \cap V$.

Soit k un entier naturel (ou le symbole ∞). On dit que s est *k -fois continûment dérivable* s'il en est ainsi de son expression dans toute carte de π (ou ce qui revient au même dans toute carte d'un atlas de π ou encore si elle appartient à $\mathcal{C}^k(X, \tau(\pi))$). On désigne par $\mathcal{C}^k(X, \pi)$ l'ensemble de ces sections.

Remarquons que l'ensemble $\mathcal{F}(X, \pi)$ de toutes les sections de π est naturellement muni d'une structure de $\mathcal{F}(X, \mathbf{k})$ -module et que $\mathcal{C}^k(X, \pi)$ en est un sous- $\mathcal{C}^k(X, \mathbf{k})$ -module.

L'expression dans une carte Φ de domaine U induit une application linéaire de $\mathcal{C}^k(X, \pi)$ dans $\mathcal{C}^k(U, \mathbf{k}^p)$ et l'on munit $\mathcal{C}^k(X, \pi)$ de la topologie la moins fine rendant ces applications continues. C'est un espace localement convexe et complet. C'est un espace de Fréchet si X est dénombrable à l'infini.

Pour tout ensemble compact K de X , l'ensemble $\mathcal{C}_K^k(X, \pi)$ des sections dont le support ¹⁾ est contenu dans K est un sous-espace fermé de $\mathcal{C}^k(X, \pi)$.

L'ensemble $\mathcal{C}_c^k(X, \pi)$ des sections de $\mathcal{C}^k(X, \pi)$ à support compact est un espace localement convexe et complet pour la topologie vectorielle limite inductive des espaces $\mathcal{C}_K^k(X, \pi)$.

LEMME 1. On désigne par $(U_\nu)_{\nu \in I}$ un recouvrement ouvert de X et, pour tout couple (ι, κ) d'indices, par $s_{\kappa\iota}$ une section de $\mathcal{C}^k(U_\iota \cap U_\kappa, \pi)$. On suppose que l'on a

$$s_{\kappa\lambda} - s_{\iota\lambda} + s_{\iota\kappa} = 0$$

en tout point de $U_\iota \cap U_\kappa \cap U_\lambda$. Il existe alors pour tout indice ι une section s_ι de $\mathcal{C}^k(U_\iota, \pi)$ telle que l'on ait

$$s_{\kappa\iota} = s_\iota - s_\kappa$$

en tout point de $U_\iota \cap U_\kappa$.

Désignons par $(\alpha_\nu)_{\nu \in I}$ une partition de l'unité subordonnée à $(U_\nu)_{\nu \in I}$ (§ 1, proposition 1). La section $t_{\kappa\iota}$ obtenue en prolongeant par 0 la section $\alpha_\kappa s_{\kappa\iota}$ appartient à $\mathcal{C}^k(U_\iota, \pi)$ et l'on pose

$$s_\iota = \sum_{\kappa \in I \setminus \{\iota\}} t_{\kappa\iota}.$$

On vérifie aisément que ces sections ont toutes les propriétés requises.

Soient π et ρ deux fibrés vectoriels (réels ou complexes) sur X et soit u une application de $\tau(\pi)$ dans $\tau(\rho)$. On suppose que l'on a

$$\rho \cdot u = \pi$$

et que l'application u_x de π_x dans ρ_x induite par u est linéaire pour tout point x de X .

Désignons par Φ et Ψ des cartes de π et ρ à valeurs dans $U \times \mathbf{k}^p$ et $U \times \mathbf{k}^r$ respectivement. On appelle *expression de u dans (Φ, Ψ)* l'application $u_{\Psi\Phi}$ de U dans $M(r, p; \mathbf{k})$ définie par

$$u_{\Psi\Phi}(x) = \Psi_x \cdot u_x \cdot \Phi_x^{-1}.$$

On dit que l'application u est un *morphisme* si elle vérifie les conditions ci-dessus et si son expression dans tout couple de cartes est indéfiniment dérivable (ou ce qui revient au même si c'est une application indéfiniment dérivable de $\tau(\pi)$ dans $\tau(\rho)$). On désigne par $\mathcal{C}^\infty(\pi, \rho)$ l'ensemble des morphismes de π dans ρ . C'est de manière naturelle un $\mathcal{C}^\infty(X, \mathbf{k})$ -module.

¹⁾ On appelle *support* d'une section continue le plus petit ensemble fermé en dehors duquel elle est nulle.

Les fibrés vectoriels sur X et leurs morphismes s'organisent de manière évidente en une catégorie.

LEMME 2. *Pour qu'un morphisme de π dans ρ soit un isomorphisme, il faut et il suffit qu'il soit bijectif.*

La condition est évidemment nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Si u est bijective, on a

$$(u^{-1})_{\Phi\Psi}(x) = \Phi_x \cdot (u^{-1})_x \cdot \Psi_x^{-1} = (u_{\Psi\Phi}(x))^{-1}$$

et par conséquent $(u^{-1})_{\Phi\Psi}$ est indéfiniment dérivable.

Exemple 1.

On appelle *fibré vectoriel produit de rang p sur X* et l'on désigne par \mathbf{k}_X^p l'application pr_1 de $X \times \mathbf{k}^p$ dans X munie de la structure vectorielle dont un atlas est réduit à l'application identique de $X \times \mathbf{k}^p$. On dit qu'un fibré vectoriel π sur X est *trivial* s'il est isomorphe à un fibré produit \mathbf{k}_X^p . Il revient au même de dire qu'il existe p sections de $\mathcal{C}^\infty(X, \pi)$ qui engendrent la fibre en tout point.

Exemple 2.

Soit π un fibré vectoriel sur X . Pour toute sous-variété Y de X , l'application $\pi|_{\pi^{-1}(Y)}$ est naturellement munie d'une structure vectorielle. Le fibré vectoriel correspondant se désigne par $\pi|_Y$.

Exemple 3.

Soit π un fibré vectoriel sur X . On dit que la restriction ρ de π à une partie de $\tau(\pi)$ est un *sous-fibré* si elle vérifie la condition suivante:

(SF) Pour tout point x de X , il existe une carte Φ de π à valeurs dans $U \times \mathbf{k}^p$ dont le domaine contient x et un entier naturel r au plus égal à p tel que

$$\Phi(\rho^{-1}(U)) = U \times (\mathbf{k}^r \oplus 0).$$

Les cartes de la forme $(1_U \times pr_1) \cdot \Phi$ définissent une structure vectorielle sur ρ que l'on dit *induite par π* . Nous munirons toujours un sous-fibré de la structure vectorielle induite.

Notons que $\tau(\rho)$ est une sous-variété fermée de $\tau(\pi)$ et que l'injection canonique est un morphisme.

La relation

$$\ll \pi(y') = \pi(y'') \quad \text{et} \quad y' - y'' \in \tau(\rho) \gg$$

est une relation d'équivalence sur $\tau(\pi)$. On désigne par σ l'application déduite de π par passage au quotient. On vérifie aisément que les applications de la forme

$$(1_U \times pr_2) \cdot \Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbf{k}^{p-r}$$

où Φ vérifie (SF) induisent par passage au quotient des cartes de σ deux à deux compatibles. Munie de la structure vectorielle correspondante, l'application σ s'appelle le *fibré quotient de π par ρ* . Notons que la projection canonique de $\tau(\pi)$ dans $\tau(\sigma)$ est un morphisme.

Soient π et ρ deux fibrés vectoriels sur X .

On désigne par Φ et Φ' (resp. Ψ et Ψ') des cartes de π (resp. ρ) de domaines respectifs U et U' et par g (resp. h) la transition de Φ dans Φ' (resp. de Ψ dans Ψ').

Nous allons munir la projection canonique de $\coprod_{x \in X} \pi_x \oplus \rho_x$ dans X d'une structure vectorielle. On définit des cartes Λ et Λ' de domaines respectifs U et U' en posant

$$\Lambda(x, y) = (x, (\Phi_x \oplus \Psi_x)(y)) \quad \text{et} \quad \Lambda'(x, y) = (x, (\Phi'_x \oplus \Psi'_x)(y)).$$

La transition de Λ dans Λ' est donnée par la formule

$$f(x) = g(x) \oplus h(x).$$

Ces cartes sont donc compatibles. Le fibré vectoriel correspondant s'appelle la *somme directe de π et ρ* et se désigne par $\pi \oplus \rho$.

En particulier, pour tout entier naturel q , on désigne par π^q le fibré vectoriel somme directe de q exemplaires de π .

Nous allons munir la projection canonique de $\coprod_{x \in X} \pi_x \otimes \rho_x$ dans X d'une structure vectorielle. On définit des cartes Λ et Λ' de domaines respectifs U et U' en posant

$$\Lambda(x, y) = (x, (\Phi_x \otimes \Psi_x)(y)) \quad \text{et} \quad \Lambda'(x, y) = (x, (\Phi'_x \otimes \Psi'_x)(y)).$$

La transition de Λ dans Λ' est donnée par la formule

$$f(x) = g(x) \otimes h(x).$$

Ces cartes sont donc compatibles. Le fibré vectoriel correspondant s'appelle le *produit tensoriel de π et ρ* et se désigne par $\pi \otimes \rho$.

Supposons π de rang p . Pour tout entier j compris entre 1 et p , on désigne par e_j le j^{e} vecteur de base dans \mathbf{k}^p et par t_j (resp. t'_j) la section de π sur U (resp. U') définie par

$$t_j(x) = \Phi_x^{-1}(e_j) \quad (\text{resp. } t'_j(x) = \Phi'_x{}^{-1}(e_j)).$$

Pour tout point x de $U \cap U'$, on a

$$t_j(x) = \sum_{1 \leq k \leq p} g_{kj}(x) t'_k(x)$$

où les g_{kj} désignent les coefficients de la matrice g . D'autre part, la restriction à U (resp. U') de toute section s de $\pi \otimes \rho$ s'écrit d'une manière et d'une seule

$$s|_U = \sum_{1 \leq j \leq p} t_j \otimes u_j \quad (\text{resp. } s|_{U'} = \sum_{1 \leq j \leq p} t'_j \otimes u'_j)$$

où les u_j (resp. u'_j) sont des sections de ρ sur U (resp. U'). Un calcul élémentaire montre que ces sections sont liées par les relations

$$u'_j = \sum_{1 \leq k \leq p} g_{jk} u_k.$$

Désignons par σ un troisième fibré vectoriel sur X et par δ un morphisme de $\pi \otimes \rho$ dans σ . Pour toute section u de π et toute section v de ρ , on définit une section $\delta(u, v)$ de σ en posant

$$\delta(u, v)(x) = \delta(u(x) \otimes v(x)).$$

On définit ainsi une application bilinéaire de $\mathcal{F}(X, \pi) \times \mathcal{F}(X, \rho)$ dans $\mathcal{F}(X, \sigma)$. De plus, on vérifie aisément que si u est une section de $\mathcal{C}^k(X, \pi)$ et v une section de $\mathcal{C}^k(X, \rho)$, alors $\delta(u, v)$ est une section de $\mathcal{C}^k(X, \sigma)$.

On dit que δ est une *dualité* si pour tout point x de X , l'application bilinéaire de $\pi_x \times \rho_x$ dans σ_x déduite de δ_x induit des isomorphismes de π_x sur $\text{Hom}(\rho_x, \sigma_x)$ et de ρ_x sur $\text{Hom}(\pi_x, \sigma_x)$.

Nous allons munir la projection canonique de $\coprod_{x \in X} \pi_x^*$ dans X d'une structure vectorielle. On définit des cartes A et A' de domaines respectifs U et U' en posant

$$A(x, y) = (x, y \cdot \Phi_x^{-1}) \quad \text{et} \quad A'(x, y) = (x, y \cdot \Phi'_x{}^{-1}).$$

La transition de A dans A' est donnée par la formule

$$f(x) = {}^t g(x)^{-1}.$$

Ces cartes sont donc compatibles. Le fibré vectoriel correspondant s'appelle le *dual de π* et se désigne par π^* .

On construit de la même manière des fibrés vectoriels $A^q \pi$ et $A \pi$.

¹⁾ Pour tout espace vectoriel E sur \mathbf{k} , on désigne par E^* l'espace dual de E , i.e. l'espace des applications linéaires de E dans \mathbf{k} .

Soit E un espace vectoriel de dimension p sur \mathbf{k} . On appelle *forme hermitienne sur E* toute application α de $E \times E$ dans \mathbf{k} vérifiant les conditions suivantes :

(1) Pour tout vecteur t de E , l'application partielle $\alpha(\cdot, t)$ est \mathbf{k} -linéaire.

(2) Pour tout couple (t', t'') de vecteurs de E , on a

$$\alpha(t', t'') = \overline{\alpha(t'', t')}.$$

Si \mathbf{k} est égal à \mathbf{R} , une forme hermitienne est donc une forme bilinéaire symétrique. On désigne par $\text{Herm}(E)$ l'espace vectoriel (réel) des formes hermitiennes sur E . Sa dimension est égale à $\frac{p(p+1)}{2}$ si \mathbf{k} est égal à \mathbf{R} , à p^2 si \mathbf{k} est égal à \mathbf{C} . Les formes hermitiennes sur \mathbf{k}^p s'identifient de manière naturelle à des matrices de $M(p; \mathbf{k})$.

On dit qu'une forme hermitienne est *positive* (resp. *positive non dégénérée*) si le nombre réel $\alpha(t, t)$ est positif (resp. strictement positif) pour tout vecteur t non nul.

Reprenons le cours de notre histoire. Nous allons munir la projection canonique de $\coprod_{x \in X} \text{Herm}(\pi_x)$ dans X d'une structure vectorielle. On définit deux cartes Λ et Λ' de domaines respectifs U et U' en posant

$$\Lambda(x, \alpha) = (x, \alpha \cdot (\Phi_x^{-1} \times \Phi_x^{-1})) \quad \text{et} \quad \Lambda'(x, \alpha) = (x, \alpha \cdot (\Phi_x'^{-1} \times \Phi_x'^{-1})).$$

La transition de Λ dans Λ' est donnée par le produit de matrices

$$f(x) = {}^t \overline{g(x)}^{-1} \alpha g(x)^{-1}$$

pour tout point x de $U \cap U'$ et toute forme hermitienne α sur \mathbf{k}^p . En particulier, ces cartes sont compatibles. Le fibré vectoriel réel correspondant se désigne par $\text{Herm}(\pi)$.

On appelle *métrique hermitienne sur π* toute section de $\mathcal{C}^\infty(X, \text{Herm}(\pi))$ qui induit une forme hermitienne positive non dégénérée sur toutes les fibres.

Désignons par α une métrique hermitienne sur π .

Pour toute section s de π , on définit une fonction $|s|$ à valeurs réelles positives sur X en posant

$$|s|(x) = (\alpha(x)(s(x), s(x)))^{\frac{1}{2}}.$$

On définit aussi une application u de $\tau(\pi)$ dans $\tau(\pi^*)$ en posant

$$u(x, y) = (x, \alpha(\cdot, y)).$$

On vérifie aisément que u est un isomorphisme de fibrés vectoriels réels qui permet d'identifier π à son dual π^* .

LEMME 3. *Tout fibré vectoriel π sur X possède une métrique hermitienne.*

L'assertion est évidente si π est trivial. Sinon, on désigne par $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X formé de domaines de cartes de π et par $(\lambda_i)_{i \in I}$ une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement. Pour tout indice i , il existe une métrique hermitienne α_i sur $\pi|_{U_i}$ et l'on pose

$$\alpha = \sum_{i \in I} \lambda_i \alpha_i$$

On vérifie aisément que α est une métrique hermitienne sur π .

Désignons par X une variété différentielle, par p un entier naturel et par $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X . On appelle *cocycle réel* (resp. *complexe*) de rang p subordonné à \mathcal{U} toute famille $(g_{\kappa i})_{(i, \kappa) \in I \times I}$, où $g_{\kappa i}$ est une application indéfiniment dérivable de $U_i \cap U_\kappa$ dans $G(p; \mathbf{R})$ (resp. $G(p; \mathbf{C})$) vérifiant la relation

$$g_{\lambda i} = g_{\lambda \kappa} g_{\kappa i}$$

en tout point de $U_i \cap U_\kappa \cap U_\lambda$.

On dit que deux tels cocycles $(g_{\kappa i})$ et $(h_{\kappa i})$ sont *cobordants* s'il existe une famille (f_i) , où f_i est une application indéfiniment dérivable de U_i dans $G(p; \mathbf{k})$ vérifiant la relation

$$f_\kappa = h_{\kappa i} f_i g_{i \kappa}$$

en tout point de $U_i \cap U_\kappa$.

Cette relation est une relation d'équivalence sur l'ensemble des cocycles de rang p subordonnés à \mathcal{U} . L'ensemble quotient se désigne par $\text{Pic}(\mathcal{U}, G(p; \mathbf{k}))$.

Soit $\mathcal{V} = (V_\kappa)_{\kappa \in K}$ un second recouvrement ouvert de X plus fin que \mathcal{U} et soit τ une application de raffinement de K dans I . Pour tout cocycle $g = (g_{\kappa i})$ de rang p subordonné à \mathcal{U} , on définit un cocycle $\tau^*(g)$ de rang p subordonné à \mathcal{V} en posant

$$\tau^*(g)_{\kappa i} = g_{\tau(\kappa)\tau(i)}|_{V_i \cap V_\kappa}.$$

L'application τ^* est compatible avec la relation de cobordance. De plus, si τ' est une autre application de raffinement, on a

$$g_{\tau'(\kappa)\tau(\kappa)} = g_{\tau'(\kappa)\tau'(i)} g_{\tau'(i)\tau(i)} g_{\tau(i)\tau(\kappa)}.$$

Ceci montre que l'application de $\text{Pic}(\mathcal{U}, G(p; \mathbf{k}))$ dans $\text{Pic}(\mathcal{V}, G(p; \mathbf{k}))$ déduite de τ^* par passage aux quotients est indépendante de τ . On la désigne par $\sigma(\mathcal{V}, \mathcal{U})$.

Si \mathcal{W} est un recouvrement ouvert de X plus fin que \mathcal{V} , on a

$$\sigma(\mathcal{W}, \mathcal{V}) \cdot \sigma(\mathcal{V}, \mathcal{U}) = \sigma(\mathcal{W}, \mathcal{U}).$$

En particulier, si \mathcal{U} et \mathcal{V} sont équivalents (i.e. si chacun d'eux est plus fin que l'autre), les applications $\sigma(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ et $\sigma(\mathcal{V}, \mathcal{U})$ sont des bijections réciproques l'une de l'autre.

On fixe une fois pour toutes un système cofinal de recouvrements ouverts de X et l'on désigne par $\text{Pic}(X, G(p; \mathbf{k}))$ la limite inductive des ensembles $\text{Pic}(\mathcal{U}, G(p; \mathbf{k}))$ et des applications $\sigma(\mathcal{V}, \mathcal{U})$ lorsque \mathcal{U} et \mathcal{V} parcourent ce système. Les éléments de $\text{Pic}(X, G(p; \mathbf{k}))$ s'appellent les *fibrés principaux de groupe structural* $G(p; \mathbf{k})$ sur X .

Soit π (resp. ρ) un fibré vectoriel de rang pur p (resp. r) sur X et soit $(\Phi_i)_{i \in I}$ (resp. $(\Psi_i)_{i \in I}$) un atlas de π (resp. ρ). On suppose que Φ_i et Ψ_i ont même domaine U_i et l'on désigne par $g_{\kappa i}$ (resp. $h_{\kappa i}$) la transition de Φ_i dans Φ_κ (resp. de Ψ_i dans Ψ_κ). L'expression dans (Φ_i, Ψ_i) d'un morphisme u de π dans ρ est une application indéfiniment dérivable u_i de U_i dans $M(r, p; \mathbf{k})$ et l'on a

$$u_\kappa = h_{\kappa i} u_i g_{i\kappa}.$$

En particulier, on voit que π et ρ sont isomorphes si et seulement si les cocycles $(g_{\kappa i})$ et $(h_{\kappa i})$ sont cobordants. On en déduit que l'image $\delta(\pi)$ de $(g_{\kappa i})$ dans $\text{Pic}(X, G(p; \mathbf{k}))$ ne dépend que de π (et non de l'atlas (Φ_i)). On l'appelle le *fibré principal associé à π* .

Nous allons montrer que tout fibré principal de groupe structural $G(p; \mathbf{k})$ sur X est associé à un fibré vectoriel de rang pur p .

Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X et soit $(g_{\kappa i})$ un cocycle de rang p subordonné à ce recouvrement. Pour tout couple d'indices (i, κ) , on définit une bijection $\Phi_{\kappa i}$ de $(U_i \cap U_\kappa) \times \mathbf{k}^p$ sur lui-même en posant

$$\Phi_{\kappa i}(x, t) = (x, g_{\kappa i}(x)(t)).$$

En tout point de $U_i \cap U_\kappa \cap U_\lambda$, on a

$$\Phi_{\lambda i} = \Phi_{\lambda \kappa} \cdot \Phi_{\kappa i}.$$

Désignons par Y l'ensemble obtenu par recollement des $U_i \times \mathbf{k}^p$ au moyen des applications $\Phi_{\kappa i}$ et par π l'application de Y dans X obtenue par recollement des premières projections. Pour tout indice i , l'application canonique de $U_i \times \mathbf{k}^p$ dans $\pi^{-1}(U_i)$ est une bijection et la bijection réciproque Φ_i est une carte de π . La transition de Φ_i dans Φ_κ n'est autre que $g_{\kappa i}$ ce qui démontre l'assertion.

SCHOLIE. *Les classes d'isomorphie de fibrés vectoriels réels (resp. complexes) de rang pur p sur X sont en correspondance biunivoque avec les fibrés principaux de groupe structural $G(p; \mathbf{R})$ (resp. $G(p; \mathbf{C})$) sur X .*

Le groupe $G(1; \mathbf{k})$ étant commutatif, on vérifie aisément que la multiplication point par point des applications induit une structure de groupe commutatif sur $\text{Pic}(X, G(1; \mathbf{k}))$. Si π et ρ sont des fibrés en droites sur X , on a

$$\delta(\pi \otimes \rho) = \delta(\pi) \delta(\rho) \quad \text{et} \quad \delta(\pi^*) = \delta(\pi)^{-1}.$$

Soit ξ un fibré principal de groupe structural \mathbf{C}^* sur X et soit $(g_{\kappa\iota})$ un cocycle de rang 1 représentant ξ et subordonné à un recouvrement $(U_\iota)_{\iota \in I}$. Il est clair que la classe de $(\overline{g_{\kappa\iota}})$ dans $\text{Pic}(X, \mathbf{C}^*)$ ne dépend que de ξ . On la désigne par $\bar{\xi}$.

LEMME 4. *Le fibré principal $\bar{\xi}$ est l'inverse du fibré principal ξ .*

Conservons les notations précédentes. Pour tout couple (ι, κ) d'indices, on désigne par $f_{\kappa\iota}$ le logarithme de la fonction $|g_{\kappa\iota}|^2$. Il existe pour tout indice ι une fonction f_ι de $\mathcal{C}^\infty(U_\iota, \mathbf{R})$ telle que

$$f_{\kappa\iota} = f_\iota - f_\kappa$$

sur $U_\iota \cap U_\kappa$ (lemme 1) et l'on pose

$$g_\iota = \exp(f_\iota).$$

On a alors la relation

$$g_\iota = |g_{\kappa\iota}|^2 g_\kappa = g_{\iota\kappa}^{-1} g_\kappa \overline{g_{\kappa\iota}}$$

ce qui démontre l'assertion.

Soit X une variété différentielle de dimension pure n et soit π un fibré vectoriel de rang pur p sur X .

Désignons par Φ et Ψ deux cartes de π ayant pour domaine le même voisinage U d'un point x de X et par g la transition de Φ dans Ψ . Pour toute section s de $\mathcal{C}^\infty(X, \pi)$, on a

$$s_\Psi = g \cdot s_\Phi.$$

On dit que s est *transverse (à la section nulle) au point x* si $s(x)$ est non nul ou si s_Φ est de rang p au point x . En vertu de ce qui précède, cette condition est indépendante de Φ . On dit que s est *transverse (à la section nulle)* si elle est transverse en tout point de X .

LEMME 5. *Les sections transverses de π forment une partie dense de $\mathcal{C}^\infty(X, \pi)$.*

Supposons X connexe; l'espace $\mathcal{C}^\infty(X, \pi)$ est alors un espace de Fréchet. Pour toute partie compacte K de X , on désigne par W_K l'ensemble des sections de $\mathcal{C}^\infty(X, \pi)$ qui sont transverses en tout point de K . En vertu du théorème de Baire ([1], chap. IX, § 5, n° 3, théorème 1), il suffit de montrer que W_K est ouvert et dense dans $\mathcal{C}^\infty(X, \pi)$. Pour ce faire, on peut supposer que X est un ensemble ouvert de \mathbf{R}^n et que π est le fibré produit \mathbf{R}_X^p . Les sections de π s'identifient alors aux fonctions à valeurs dans \mathbf{R}^p et les sections transverses aux fonctions ayant l'origine pour valeur régulière.

Soit f une fonction de $\mathcal{C}^\infty(X, \mathbf{R}^p)$. Posons

$$g(x) = |f(x)| + \sum_j |A_j(f)(x)|$$

où les $A_j(f)$ désignent le déterminant des mineurs d'ordre p extraits de la matrice jacobienne de f . Pour que l'origine soit une valeur régulière de f , il faut et il suffit que g ne s'annule pas sur X . On en déduit aisément que W_K est ouvert. D'autre part, le théorème de Sard (appendice I, théorème 4) montre qu'en ajoutant à f un vecteur convenable, l'origine devient une valeur régulière, d'où l'assertion.

Remarque 1.

Si p est strictement supérieur à n , la même démonstration montre que le fibré π possède une section indéfiniment dérivable partout non nulle.

LEMME 6. *Soient x_0 et x_1 deux points de X et soit s une section de $\mathcal{C}^\infty(X, \pi)$. On suppose que x_0 est l'unique zéro de s dans un voisinage connexe V de $\{x_0, x_1\}$. Il existe alors une section t de $\mathcal{C}^\infty(X, \pi)$ qui coïncide avec s sur $X \setminus V$ et dont x_1 est l'unique zéro dans V . Si de plus s est transverse, on peut choisir t transverse.*

On se ramène aisément au cas où x_0 et x_1 sont contenus dans un ensemble ouvert connexe U lui-même relativement compact dans le domaine d'une carte Φ de π contenu dans V . Il existe un difféomorphisme u de X tel que

$$u(x_1) = x_0 \quad u|_{X \setminus U} = 1_{X \setminus U}$$

(§ 1, lemme 3). On vérifie aisément que la section t définie par

$$\begin{aligned} t(x) &= s(x) && \text{si } x \in X \setminus U \\ t(x) &= (\Phi_x^{-1} \cdot \Phi_{u(x)})(s(u(x))) && \text{si } x \in U \end{aligned}$$

a toutes les propriétés requises.

THÉORÈME 1. Soit X une variété différentielle de dimension pure n et soit π un fibré vectoriel de rang pur n sur X . On suppose que X est ouverte ¹⁾. Il existe alors une section s de $\mathcal{C}^\infty(X, \pi)$ partout non nulle.

On suppose X connexe et l'on désigne par $(K_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite exhaustive de parties compactes de X telles que $X \setminus K_j$ n'ait aucune composante connexe relativement compacte dans X (appendice II, lemme 6). On va construire par récurrence sur j une section transverse s_j de π qui coïncide avec s_{j-1} sur K_{j-1} et qui ne s'annule pas sur K_j . Ceci établira l'assertion. On suppose que K_0 est vide et l'on prend pour s_0 une section transverse quelconque de π (il en existe en vertu du lemme 5). Supposons s_j construite; on désigne par A l'ensemble de ses zéros (c'est un ensemble fermé et discret puisqu'elle est transverse et puisque le rang de π est égal à la dimension de X) et par $\{x_1, \dots, x_p\}$ l'intersection de A et de K_{j+1} . Il existe un ensemble de points $\{y_1, \dots, y_p\}$ deux à deux distincts dans $X \setminus (K_{j+1} \cup A)$ tel que x_k et y_k se trouvent dans la même composante connexe de $X \setminus K_j$.

Désignons par V_1 un voisinage connexe de $\{x_1, y_1\}$ dans $X \setminus K_j$ tel que x_1 soit le seul zéro de s_j dans V_1 . Il existe une section transverse t_1 de π qui coïncide avec s_j sur $X \setminus V_1$ et dont le seul zéro dans V_1 soit y_1 (lemme 6). On construit de la même manière et par récurrence sur k un voisinage connexe V_k de $\{x_k, y_k\}$ dans $X \setminus K_j$ tel que x_k soit le seul zéro de t_{k-1} dans V_k et une section transverse t_k de π qui coïncide avec t_{k-1} sur $X \setminus V_k$ et dont le seul zéro dans V_k soit y_k . Il suffit alors de prendre pour s_{j+1} la section t_p .

COROLLAIRE. Tout fibré vectoriel complexe de rang 1 sur une surface différentielle ouverte est trivial.

Remarque 2.

Tout fibré vectoriel complexe π sur une surface différentielle ouverte est trivial: la démonstration se fait par récurrence sur le rang de π . Elle est laissée en exercice au lecteur (voir chap. V, § 4, théorème 6).

§ 3. CALCUL DIFFÉRENTIEL

Dans tout ce paragraphe, on désigne par X une variété différentielle de dimension pure n .

¹⁾ On dit qu'une variété est *ouverte* si aucune de ses composantes connexes n'est compacte.