§1. Théorème de décomposition de Weyl

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

CHAPITRE IV

COURBES HOLOMORPHES COMPACTES

Dans tout ce chapitre, on désigne par X *une courbe holomorphe compacte et connexe.*

§ 1. THÉORÈME DE DÉCOMPOSITION DE WEYL

PROPOSITION 1. *Pour toute forme différentielle* u *de* $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{1,0})$ *(resp.* $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{0,1})$*), il existe une fonction* v *de* $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$ *telle que* $u + d'v$ *(resp.* $u - d''v$*) soit fermée.*

Pour qu'une forme différentielle de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{1,1})$ appartienne à l'image de l'opérateur $d' \cdot d''$, il faut et il suffit que son intégrale soit nulle (chap. III, § 3, proposition 4). La formule de Stokes montre qu'il en est ainsi de la forme différentielle du. Il existe par conséquent une fonction v de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$ telle que

$$du = (d' \cdot d'')(v) = -(d'' \cdot d')(v)$$

ce qui démontre l'assertion.

COROLLAIRE. *Les opérateurs différentiels*

$$d : \mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1_{\mathbf{C}}) \to \mathscr{C}^\infty(X, \Omega^2_{\mathbf{C}}) = \mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{1,1})$$

$$d'' : \mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{1,0}) \to \mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{1,1}) \quad et \quad d' \cdot d'' : \mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C}) \to \mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{1,1})$$

ont même image.

En particulier, l'intégration des formes différentielles de degré 2 *induit des isomorphismes canoniques*

$$\mathscr{H}^1(X) = \mathbf{H}^1(X, \Omega^{1,0}) = \mathbf{H}^2(X, \mathbf{C}) = \mathbf{C}\,.$$

Les inclusions

$$\operatorname{Im}(d' \cdot d'') \subset \operatorname{Im}(d'') \subset \operatorname{Im}(d)$$

sont évidentes. Réciproquement, toute forme différentielle u de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$ s'écrit

$$u = u_1 + u_2$$

avec u_1 de bidegré $(1, 0)$ et u_2 de bidegré $(0, 1)$. La proposition 1 montre qu'il existe des fonctions v_1 et v_2 de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$ telles que

$$d(u_1 + d'v_1) = 0 \quad \text{et} \quad d(u_2 - d''v_2) = 0 .$$

On en déduit que

$$du = du_1 + du_2 = (d' \cdot d'')(v_1 + v_2)$$

ce qui démontre le corollaire.

Remarque 1.

On vient de donner une autre démonstration du fait que $\mathbf{H}^2(X, \mathbf{C})$ est canoniquement isomorphe à $\mathbf{C}$ pour une surface différentielle compacte connexe sous-jacente à une courbe holomorphe (chap. 0, § 4, théorème 3).

THÉORÈME 1 (Weyl). *Toute forme différentielle fermée u de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$ s'écrit d'une manière et d'une seule*

$$u = u_1 + u_2 + dv$$

où u_1 et u_2 sont des formes différentielles fermées de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{1,0})$ et $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{0,1})$ respectivement et v une fonction de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$.

Montrons tout d'abord l'existence de la décomposition. On peut écrire

$$u = u_1' + u_2'$$

avec u_1' de bidegré $(1, 0)$ et u_2' de bidegré $(0, 1)$. Il existe une fonction v de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$ telle que

$$d(u_1' - d'v) = 0$$

(proposition 1). Il suffit alors de poser

$$u_1 = u_1' - d'v \quad \text{et} \quad u_2 = u_2' - d''v .$$

Pour montrer l'unicité, on suppose que l'on a

$$u_1 + u_2 + dv = 0 .$$

En appliquant l'opérateur différentiel d' aux deux membres de cette équation, on voit que v est harmonique, donc constante, ce qui démontre la proposition.

Toute forme différentielle holomorphe de degré 1 étant fermée, l'inclusion canonique de $\mathscr{O}(X, \Omega^{1,0})$ dans $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$ induit par passage au quotient une application linéaire α de $\mathbf{H}^0(X, \Omega^{1,0})$ dans $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C})$.

Désignons par $Z(X, \Omega_{\mathbf{C}}^1)$ l'ensemble des formes différentielles fermées de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega_{\mathbf{C}}^1)$. On définit une application linéaire $\tilde{\beta}$ de $Z(X, \Omega_{\mathbf{C}}^1)$ dans $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{0,1})$ en associant à toute forme fermée sa composante de bidegré (0, 1). Par passage aux quotients, cette application définit une application linéaire β de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C})$ dans $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X)$.

Proposition 2. *La suite d'espaces vectoriels et d'applications linéaires*

$$0 \to \mathbf{H}^0(X, \Omega^{1,0}) \xrightarrow{\alpha} \mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}) \xrightarrow{\beta} \mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X) \to 0$$

est exacte.

La surjectivité de β résulte de la proposition 1, et le seul point non absolument trivial est de démontrer que tout élément u de $Z(X, \Omega_{\mathbf{C}}^1)$ dont l'image par $\tilde{\beta}$ est de la forme $d''v$ est équivalent à une forme différentielle holomorphe. Or, la relation

$$u = u_1 + d''v$$

avec u_1 homogène de bidegré (1, 0) peut s'écrire

$$u = u_1 - d'v + dv\,.$$

La forme différentielle $u_1 - d'v$ étant fermée et homogène de bidegré (1,0), elle est holomorphe ce qui démontre l'assertion.

On appelle *genre de* X la dimension de l'espace vectoriel complexe $\mathbf{H}^0(X, \Omega^{1,0})$. Par dualité (chap. III, § 2, proposition 2, corollaire), c'est aussi la dimension de l'espace $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X)$. La proposition 2 montre que c'est un invariant différentiel (et même topologique): c'est la moitié de la dimension de l'espace $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C})$ (chap. 0, § 5, remarque 2).

Exemple 1.

Le genre de $\mathbf{P}^1$ est nul. En effet, désignons par u une forme différentielle holomorphe sur $\mathbf{P}^1$. Pour chacune des cartes usuelles de $\mathbf{P}^1$, on peut écrire

$$u_{\phi 0} = v_0 dz \qquad \text{et} \qquad u_{\phi 1} = v_1 dz$$

où v_0 et v_1 sont des fonctions holomorphes sur $\mathbf{C}$. Par changement de cartes, on voit que l'on a

$$v_0(z) = -\frac{1}{z^2} v_1\left(\frac{1}{z}\right)$$

en tout point z de $\mathbf{C}^*$. Ceci n'est possible que si v_0 et v_1 sont nulles.

Exemple 2.

Le genre d'une courbe elliptique X (chap. I, § 5, numéro 3) est égal à 1. En effet, toute forme différentielle holomorphe sur X se relève en une forme différentielle holomorphe $u\,dz$ sur **C**. La fonction u étant invariante, elle est constante, ce qui démontre l'assertion.

PROPOSITION 3. *La classe de Chern d'un fibré en droites holomorphe* π *sur* X *est un entier relatif égal à l'ordre de toute section méromorphe de* π. *En particulier, si la classe de Chern est strictement négative, l'espace vectoriel* $\mathbf{H}^0(X, \pi)$ *est nul. Si la classe de Chern est nulle, le fibré* π *est différentiablement trivial. S'il est holomorphiquement trivial, l'espace vectoriel* $\mathbf{H}^0(X, \pi)$ *est de dimension* 1, *sinon il est nul.*

Ces résultats sont énoncés ici pour mémoire (chap. I, § 4, lemme 1).

§ 2. PROBLÈMES DE COUSIN

Soit π un fibré vectoriel holomorphe sur X. Nous avons vu (chap. I, § 3, proposition 2), qu'il existe une suite exacte

$$\mathscr{K}(X,\pi) \xrightarrow{\ \gamma_I\ } \mathscr{Q}(X,\pi) \xrightarrow{\ \delta\ } \mathbf{H}^1(X,\pi)$$

permettant de trouver sous quelles conditions il existe une section méromorphe de π ayant une partie principale donnée.

Soit u une partie principale de π et soit v une section holomorphe de $\pi^* \otimes \Omega^{1,0}$. On vérifie aisément que la classe de (w_x, v_x) dans $\mathscr{Q}(\Omega^{1,0})_x$ ne dépend pas de la section méromorphe w de π représentant u au voisinage de x. On définit ainsi une partie principale de $\Omega^{1,0}$ que l'on désigne par (u, v) et l'on pose

$$\text{Rés}(u,v) = \sum_{x\in X} \text{Rés}\big((u,v), x\big).$$

On a alors la solution suivante au premier problème de Cousin.

THÉORÈME 1. *Soit* π *un fibré vectoriel holomorphe sur* X. *Pour qu'une partie principale* u *de* π *provienne d'une section méromorphe, il faut et il suffit que la forme linéaire* Rés$(u,\ )$ *soit identiquement nulle sur* $\mathscr{O}(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$.

Rappelons tout d'abord la construction de $\delta(u)$ (chap. I, § 3, proposition 2). Désignons par $x_1, \ldots, x_n$ les points de X pour lesquels le germe u_x